別怕慢，就怕你一直在滑手機。

Don't worry if you're slow — turtles still beat the ones who never start.

主題 1　平面方程式與練習：

1. 試求包含 $A(2,1,-1)$ 、 $B(1,1,2)$ 二點且與平面 $E':7x+4y-4z=0$ 垂直的平面方程式。

解：所求平面 E 的法向量為 $\overrightarrow{n}=(a,b,c)$

E' 的法向量 $\overrightarrow{n'}=(7,4,-4)$， $\overrightarrow{AB}=(-1,0,3)$，

利用 $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{n'}$ 且 $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{AB}$，

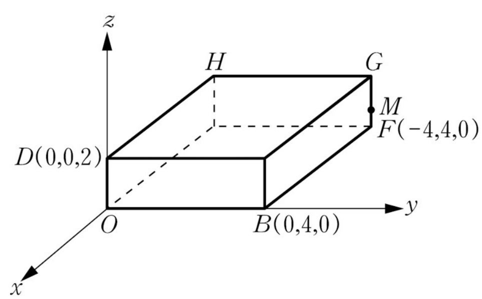
$$\overrightarrow{n'}\times\overrightarrow{AB}=\left(\begin{vmatrix}4 & -4\\0 & 3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-4 & 7\\3 & -1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}7 & 4\\-1 & 0\end{vmatrix}\right)$$
$$=(12,-17,4)$$

取 $\overrightarrow{n}=(12,-17,4)$

故平面方程式為 $12(x-2)+(-17)(y-1)+4(z+1)=0$，

即 $12x-17y+4z-3=0$.

2. 右圖的長方體中，M 點在 $\overline{FG}$ 中，且 $\overline{FM}=\dfrac{1}{2}\overline{MG}$，則通過 H 且與 $\overline{DM}$ 垂直的平面方程式為________。



解：由圖可知 $G(-4,4,2)$，$H(-4,0,2)$，

又 $\overline{FM}=\dfrac{1}{2}\overline{MG}\Rightarrow\overline{GM}:\overline{MF}=2:1$

$\therefore\ M(-4,4,\dfrac{2}{3})$

$\Rightarrow\overrightarrow{DM}=(-4,4,\dfrac{-4}{3})=\dfrac{-4}{3}(3,-3,1)$

$\therefore$ 所求平面之法向量 $\overrightarrow{n}$ 取 $(3,-3,1)$，又通過 $H(-4,0,2)$，

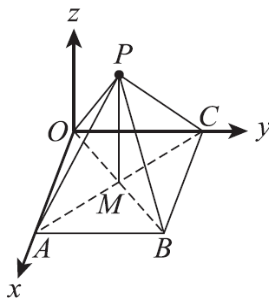
故平面方程式為

$$3(x+4)-3(y-0)+1\cdot(z-2)=0$$

整理得　$3x-3y+z+10=0$。

3. 坐標空間中，xy 平面上有一正方形，其頂點為 $O(0,0,0)$， $A(8,0,0)$， $B(8,8,0)$， $C(0,8,0)$。另一點 P 在 xy 平面的上方且與 O， A， B， C 四點的距離皆等於 6。若 $x+by+cz=d$ 為通過 A， B， P 三點的平面，則 $(b,c,d)=$______ .【98 學測】

解：如右圖，$\overline{OB}$ 的中點 $M(4,4,0)$ 為正方形 $OABC$ 的中心，



又 P 與 O， A， B， C 四點的距離皆等於 6 .

$\therefore$ 點 P 在 M 的正上方，設 P 坐標為 $(4,4,t)$，

$\overline{OP}=6 \Rightarrow \sqrt{4^2+4^2+t^2}=6$，

得 $t=2$， 即 $P(4,4,2)$，

由 $\overrightarrow{AB}=(0,8,0)$， $\overrightarrow{AP}=(-4,4,2)$

得 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AP}=(16,0,32)=16(1,0,2)$

取平面 E 法向量 $\vec{n}=(1,0,2)$，通過 $A(8,0,0)$

得平面 E ： $x+0y+2z=8$

所以 $b=0$， $c=2$， $d=8$，

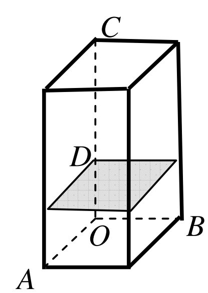
故 $(b,c,d)=(0,2,8)$.

4. 設 $O(0,0,0)$ 為坐標空間中某長方體的一個頂點，且知 $(2,2,1),(2,-1,-2),(3,-6,6)$ 為此長方體中與 O 相鄰的三頂點。若平面 $E: x+by+cz=d$ 將此長方體截成兩部分，其中包含頂點 O 的那一部分是個正立方體，則 $(b,c,d)=$____________。

【97.學測】

解：設 $A(2,2,1)$、 $B(2,-1,-2)$， $C(3,-6,6)$

由於 $\overline{OA}=\overline{OB}=3$， $\overline{OC}=9$，如右圖



依照題意，平面 E 將此長方體分割成正立方體，

則平面必平行平面 OAB 且通過 $\frac{1}{3}\overline{OC}$ 處的 D 點。

即 $\overline{CD}:\overline{OD}=2:1$，利用分點公式

$$\therefore D\left(\frac{2\times0+1\times3}{3},\frac{2\times0+1\times(-6)}{3},\frac{2\times0+1\times6}{3}\right)=(1,-2,2)$$

取平面 E 的法向量為 $\overrightarrow{OD}=(1,-2,2)$

故平面 E 方程式為 $(x-1)+(-2)(y+2)+2(z-2)=0$

$\Rightarrow x-2y+2z=9 \quad \therefore (b,c,d)=(-2,2,9)$

5. 已知平面E的x截距、y截距、z截距依序為$\log_2 a$、$\log_4 a$、$\log_8 a$，且平面E通過點$A(1,-2,2)$，則$a=$________。

解：平面E為 $\dfrac{x}{\log_2 a}+\dfrac{y}{\log_4 a}+\dfrac{z}{\log_8 a}=1$

又平面E通過點$A(1,-2,2)$

$\therefore$ $A(1,-2,2)$代入得 $\dfrac{1}{\log_2 a}+\dfrac{-2}{\log_4 a}+\dfrac{2}{\log_8 a}=1$

即 $\dfrac{1}{\log_2 a}-\dfrac{4}{\log_2 a}+\dfrac{6}{\log_2 a}=1$ 得 $\dfrac{3}{\log_2 a}=1$

$\therefore$ $\log_2 a=3$ 得 $a=2^3=8$

主題 2　兩平面的夾角(垂直、平行)學練區：

1. 三平面 $E_1: 2x+y-3z-3=0$，$E_2: x+y+az-2=0$，$E_3: bx+2y+cz-5=0$，若 $E_1 \perp E_2$ 且 $E_1 // E_3$，求 $a+b+c$ 之值。

解：$E_1: 2x+y-3z-3=0$ 的法向量 $\overrightarrow{n_1}=(2,1,-3)$

$E_2: x+y+az-2=0$ 的法向量 $\overrightarrow{n_2}=(1,1,a)$

$E_3: bx+2y+cz-5=0$ 的法向量 $\overrightarrow{n_3}=(b,2,c)$

$\because E_1 \perp E_2 \Rightarrow \overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{n_2}$　$\therefore 2\times 1+1\times 1+(-3)\times a=0$　得　$a=1$

$\because E_1 // E_3 \Rightarrow \overrightarrow{n_1} // \overrightarrow{n_3}$　$\therefore \dfrac{2}{b}=\dfrac{1}{2}=\dfrac{-3}{c}$　得　$b=4$，$c=-6$

故 $a+b+c=1+(-4)+6=3$

2. 試求兩平面 E_1：$x+y+5=0$ 及 E_2：$2x+y+2z-1=0$ 的夾角．

解：兩平面 E_1 及 E_2 的法向量分別爲 $\overrightarrow{n_1}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{n_2}=(2,1,2)$，

則　$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}$

$=\dfrac{1\times 2+1\times 1+0\times 2}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，得　$\theta=45°$

所以兩平面 E_1 及 E_2 的夾角爲 $45°, 135°$

3. 已知二平面 $E_1: 2x-3y+z=5$ 與 $E_2: 3x-y+kz=10$ 的銳夾角爲 $60°$，其中 k 爲整數，則 $k=$______。

解：$E_1: 2x-3y+z=5$ 的法向量 $\overrightarrow{n_1}=(2,-3,1)$，

$E_2: 3x-y+kz=10$ 的法向量 $\overrightarrow{n_2}=(3,-1,k)$，

$$\cos 60°=\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\frac{2\times 3+(-3)\times(-1)+1\times k}{\sqrt{14}\times\sqrt{10+k^2}}=\frac{1}{2},$$

解得 $k=-2$ 或 $\dfrac{46}{5}$(不合)

主題 3　點到平面的距離學練區：

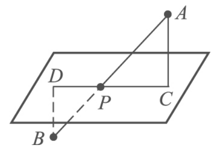
1. 空間中有 $A(-2,5,4)$、$B(1,4,-5)$ 兩點，平面 E：$2x-y+2z+4=0$，若直線 AB 交平面於 P 點，試求 $\overline{AP}:\overline{BP}$.

解：$\overline{AP}:\overline{BP}=\overline{AC}:\overline{BD}$

$=d(A,E):d(B,E)$

$=\dfrac{|2(-2)-5+2(4)+4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}:\dfrac{|2(1)-4+2(-5)+4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}$

$=3:8$.



2. 已知兩平行平面 $E_1:3x-2y-6z=3$ 和 $E_2:3x-2y-6z=k$ 的距離爲 2，求 k 的值。

解：利用兩平行平面的距離公式，

得平面 E_1 與 E_2 的距離爲

$$\frac{|3-k|}{\sqrt{3^2+(-2)^2+(-6)^2}}=\frac{|3-k|}{7}=2$$

即 $|3-k|=14$，解得 $k=14$ 或 -11

3. 坐標空間中有一平面 P 過 (0 , 0 , 0)，(1 , 2 , 3) 及 (−1 , 2 , 3) 三點。試選出正確的選項。

(1) 向量 (0 , 3 , 2) 與平面 P 垂直　　(2) 平面 P 與 xy 平面垂直

(3) 點 (0 , 4 , 6) 在平面 P 上　　(4) 平面 P 包含 x 軸

(5) 點 (1 , 1 , 1) 到平面 P 的距離是 1　　【108.學測】

解：令 $A(0,0,0)$，$B(1,2,3)$，$C(-1,2,3)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}=(1,2,3)$，$\overrightarrow{AC}=(-1,2,3)$

$\therefore \overrightarrow{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(0,-6,4)=2(0,-3,2)$

$\therefore$ P 之平面方程式爲 $-3y+2z=0$

即 P：$3y-2z=0$。

(1) 向量 (0 , 3 , 2) $\not\parallel$ (0 , 3 , −2)，故與 P 不垂直。

(2) xy 平面之法向量 (0 , 0 , 1) 不垂直 (0 , 3 , −2)，
故 xy 平面不與平面 P 垂直。

(3) 點 (0 , 4 , 6) 代入 P 成立，故在 P 上。

(4) x 軸上取二點 (0 , 0 , 0)，(1 , 0 , 0) 代入
P 均成立，故平面 P 包含 x 軸。

(5) 點 (1 , 1 , 1) 到 P 之距離 $\dfrac{|3-2|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{13}}\neq 1$。

故選(3)(4)。

主題 4　空間中直線方程式奪練區：

1. 已知通過 $A(3,0,-2)$，$B(2,2,-1)$ 兩點之直線 L 的對稱比例式為 $\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z}{4}$，試求 a，b，x_0，y_0 之值。

解：$\overrightarrow{AB}=(-1,2,1)\Rightarrow$ 方向向量 $\overrightarrow{u}\,/\!/\,\overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow(a,b,4)\,/\!/\,(-1,2,1)$

$\Rightarrow a=-4$，$b=8$。

L 的比例式為 $\dfrac{x-x_0}{-4}=\dfrac{y-y_0}{8}=\dfrac{z}{4}$，

又過點 $A(3,0,-2)$

$\Rightarrow\ \dfrac{3-x_0}{-4}=\dfrac{0-y_0}{8}=\dfrac{-2}{4}\ \Rightarrow x_0=1$，$y_0=4$

$\therefore\ a=-4$，$b=8$，$x_0=1$，$y_0=4$

2, 在空間中，下列選項何者圖形與直線 $L:\begin{cases}x=-1+4t\\ y=2-t\\ z=3t\end{cases},t\in R$ 為同一圖形

(1) $x-y-2z+3=0$　　(2) $\begin{cases}x=3+4t\\ y=1-t\\ z=-1+3t\end{cases},t\in R$　　(3) $\dfrac{x+1}{-4}=y-2=\dfrac{z}{-3}$

(4) $\begin{cases}x+y-z-1=0\\ 2x-y-3z+4=0\end{cases}$　　(5) $\begin{cases}x=-1-4t\\ y=2+t\\ z=-3\end{cases},t\in R$

解：與直線 $L:\begin{cases}x=-1+4t\\ y=2-t\\ z=3t\end{cases},t\in R$ 為同一圖形，必須為直線且滿足

①方向向量平行　　②有共同點

(1)錯；$x-y-2z+3=0$ 為一平面。

(2)錯；方向向量 $(4,-1,3)$ 平行直線 L 的方向向量，但點 $(3,1,-1)$ 不在直線 L 上。

(3)對；方向向量 $(-4,1,-3)$ 平行直線 L 的方向向量，點 $(-1,2,0)$ 落在直線 L 上。

(4)對；$\begin{cases}x+y-z-1=0\\ 2x-y-3z+4=0\end{cases}$ 方向向量 $(4,-1,3)$ 平行直線 L 的方向向量，

當 $z=0\Rightarrow$ 得點 $(-1,2,0)$ 落在直線 L 上。

(5)錯；方向向量 $(-4,1,0)$ 不平行直線 L 的方向向量。

故選(3)(4)

主題 5　直線、平面之關係要練習：

1. 設直線 L 的方程式為 $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-3}{3}$，則下列那一個平面與 L 平行(沒有交點)

   (1) $2x-y+z=1$　(2) $x+y-z=2$　(3) $3x-y+2z=1$
   (4) $4x+5y-z+5=0$　(5) $3x+3y-z=1$

解：若直線 L 與平面 E 平行，則滿足

①L 的方向向量 $\overrightarrow{u}$ 垂直平面 E 的法向量 $\overrightarrow{n}$，即 $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{n}=0$

②直線 L 上的點不在平面 E 上

直線 $L:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-1}{3}$ 其方向向量 $\overrightarrow{u}=(2,-1,3)$，$L$ 上一點 $A(2,-2,1)$

(1)錯；$(2,-1,3)\cdot(2,-1,1)\neq 0$　(2)錯；$(2,-1,3)\cdot(1,1,-1)\neq 0$

(3)錯；$(2,-1,3)\cdot(3,-1,2)\neq 0$

(4)錯；$(2,-1,3)\cdot(4,5,-1)=0$ 但 $A(2,-2,3)$ 在平面 $4x+5y-z+5=0$ 上，
　　L 在平面 E 上

(5)對；$(2,-1,3)\cdot(3,3,-1)=0$ 且 $A(2,-2,3)$ 不在平面 $3x+3y-z=1$ 上，$L//E$

故選(5)

2. 設直線 L：$\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-5}{1}=\dfrac{z-2}{-4}$ 落在平面 E：$ax-y+bz=5$ 上，試求數對 (a,b)。

解：由 L 之比例式可知 L 過點 $(2,5,2)$，

且 $\overrightarrow{u}=(3,1,-4)$。

又 $(2,5,2)$ 在 E 上

$\Rightarrow 2a-5+2b=5\Rightarrow a+b=5$。

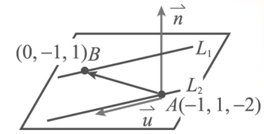
$(3,1,-4)\perp(a,-1,b)$

$\Rightarrow (3,1,-4)\cdot(a,-1,b)=0$

$\Rightarrow 3a-4b=1$。

解 $\begin{cases} a+b=5 \\ 3a-4b=1 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a=3 \\ b=2 \end{cases}$。

3. 試求包含兩平行直線 L_1 ：$\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{-1}$ 與 L_2 ：$\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$ 的平面方程式。



解：L_1 的方向向量 $\overrightarrow{u}=(2,\ 1,\ -1)$

$A(-1,1,-2)$ 、 $B(0,-1,1)\in E, \overrightarrow{AB}=(1,\ -2,\ 3)$,

則 $\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{AB}=\left(\begin{vmatrix}1 & -1\\ -2 & 3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}\right)$

$=(1,-7,-5)$

利用 $\overrightarrow{n}\,//\,\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{AB}$ ，取法向量 $\overrightarrow{n}=(1,-7,-5)$

由點法式得平面 $1\times(x+1)+(-7)(y-1)+(-5)(z+2)=0$,

即 $x-7y-5z-2=0$.

4. 坐標空間中有兩條直線 L_1,L_2 與一平面 E ，其中直線 $L_1:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z}{-5}$ ，而 L_2 的參數式爲

$\begin{cases}x=1\\ y=1+2t\\ z=1+3t\end{cases}$ （ t 爲實數）。若 L_1 落在 E 上，且 L_2 與 E 不相交，試求 E 的方程式。

【110.學測】

解：取 L_1 的方向向量 $\overrightarrow{u_1}=(2,-3,-5)$ ， L_2 的方向向量 $\overrightarrow{u_2}=(0,2,3)$ ，

設平面 E 的法向量 $\overrightarrow{n}=(a,b,c)$

由 L_1 落在 E 上，則 $\overrightarrow{u_1}\perp\overrightarrow{n}$ ， L_2 與 E 不相交($L_2\,//\,E$)，則 $\overrightarrow{u_2}\perp\overrightarrow{n}$ ，

又 $\overrightarrow{u_1}\times\overrightarrow{u_2}=\left(\begin{vmatrix}-3 & -5\\ 2 & 3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-5 & 2\\ 3 & 0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2 & -3\\ 0 & 2\end{vmatrix}\right)=(1,-6,4)$

取 E 的法向量 $\overrightarrow{n}=(1,-6,4)$ ，又平面 E 上一點 $(0,0,0)$

故平面 E 方程式爲 $x-6y+4z=0$

主題 6　空間中二直線的關係㊪練習：

1. 試判別二直線 L_1：$\frac{x-4}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{2}$與 L_2：$\frac{x}{3}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{-2}$之相交情形，若有交點，求出其交點。

解：L_1：$\begin{cases}x=3+4t\\y=-1+2t\\z=2+t\end{cases}$，$t$ 爲任意實數，L_2：$\begin{cases}x=3\\y=1-s\\z=-2+s\end{cases}$，$s$ 爲任意實數，

又 $\begin{cases}3+4t=3\\-1+2t=1-s\\2+t=-2+s\end{cases}$ 無解，

且 L_1，L_2 之方向向量 $\overrightarrow{v_1}=(3,-1,2)$，$\overrightarrow{v_2}=(3,1,-2)$ 不平行，
$\therefore L$，L_2 既不相交又不平行，故 L，L_2 互爲歪斜線．

2. 設坐標空間中三條直線 L_1，L_2，L_3 的方程式分別爲

$L_1:\frac{x}{1}=\frac{y+3}{6}=\frac{z+4}{8}$；$L_2:\frac{x}{1}=\frac{y+3}{3}=\frac{z+4}{4}$；$L_3:\frac{x}{1}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}$。

試問下列哪些選項是正確的？
(1) L_1 與 L_2 相交
(2) L_2 與 L_3 平行
(3) 點 $P(0,-3,-4)$ 與 $Q(0,0,0)$ 的距離即爲點 P 到 L_3 的最短距離
(4) 直線 $L:\begin{cases}x=0\\\frac{y+3}{4}=\frac{z+4}{-3}\end{cases}$ 與直線 L_1,L_2 皆垂直
(5) 三直線 L_1,L_2,L_3 共平面　　【97.學測】

解：(1)對；由 L_1 與 L_2 的方程式可以看出直線 L_1 與 L_2 皆過 $(0,-3,-4)$，
且 L_1 與 L_2 方向向量不平行，故 L_1 與 L_2 相交。

(2)對；$\because$ L_2 與 L_3 方向向量皆爲 $(1,3,4)$ 故 L_2 與 L_3 平行。

(3)錯；$Q(0,0,0)$ 在 L_3 上且 $\overrightarrow{PQ}=(0,3,4)$ 與 L_3 的方向向量 $(1,3,4)$ 內積 $\neq 0$，

$\therefore \overline{PQ}$ 與 L_3 不垂直，

故 $P(0,-3,-4)$ 與 $Q(0,0,0)$ 的距離不爲點 P 到 L_3 的最短距離.

(4)對；直線 L 的方向向量 $(0,4,-3)$ 與 L_1 方向向量 $(1,6,8)$ 的內積爲0，
直線 L 的方向向量 $(0,4,-3)$ 與 L_2 方向向量 $(1,3,4)$ 的內積爲0，
故直線 L 與直線 L_1,L_2 皆垂直.

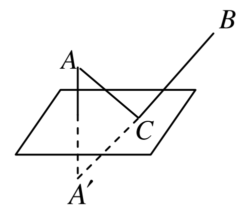
(5)對；利用選項(4)可知，$\overrightarrow{u}=(0,4,-3)$，可以爲包含直線 L_1,L_2 的平面法向量。

令平面為$E:4y-3z=k$為包含直線L_1,L_2的平面，
又直線L_1,L_2的交點$(0,-3,-4)$在平面E上，代入平面$E:4y-3z=k$
得 $k=0 \Rightarrow E:4y-3z=0$
由直線L_3與平面$E:4y+3z=0$平行，且線上的點$(0,0,0)$落在平面$E:4y-3z=0$
上，故直線L_3也包含於平面$E:4y-3z=0$上，即三直線L_1,L_2,L_3共平面。
故選(1)(2)(4)(5)

主題 7　關於平面、直線之距離、投影點、對稱點專練區：

1. $\triangle ABC$ 的三頂點坐標為 $A(2,-3,5)$、$B(3,0,10)$、$C(x,y,0)$，則使 $\triangle ABC$ 的周長為最小的點 C 坐標為__________。

解：$\because C(x,y,0)$ 在 xy 平面($z=0$)上
$\therefore A(2,-3,5)$ 對於 $z=0$ 的對稱點為 $A'(2,-3,-5)$
連接 $A'B$ 直線交 xy 平面於 C，



此時 $\triangle ABC$ 的周長最小($\overline{AC}+\overline{BC}$ 最小)。

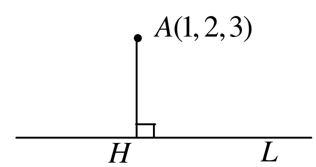
故利用 $\overrightarrow{A'C}\,/\!/\,\overrightarrow{A'B}$，

即 $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{5}{15}\Rightarrow x=\dfrac{7}{3}$，$y=-2$

得點 C 坐標為 $(\dfrac{7}{3},-2,0)$

2. 設 L 為 $x-y+z=1$ 與 $x+y-z=1$ 兩平面的交線，則直線 L 上與點 $(1,2,3)$ 距離最近之點的坐標為__________。

解：由直線 $L:\begin{cases}x-y+z=1\\x+y-z=1\end{cases}$



得知 L 的方向向量 $\vec{u}=(0,1,1)$

又 $(1,0,0)$ 為直線 L 上一點
令 $A(1,2,3)$ 關於 L 的正射影點為 $H(1,t,t)$

則 $\overrightarrow{AH}=(0,t-2,t-3)$

利用 $\overrightarrow{AH}\perp\vec{u}$ 得 $0+1\times(t-2)+1\times(t-3)=0$

$\Rightarrow t=\dfrac{5}{2}$　故 $H(1,\dfrac{5}{2},\dfrac{5}{2})$

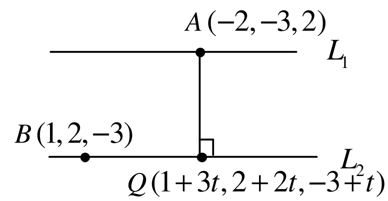
3. 已知二直線 $L_1:\begin{cases}x=-2+3t\\ y=-3+2t, t\in R\\ z=2+t\end{cases}$ 與 $L_2:\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-2}{2}=z+3$，試求二直線 L_1 與 L_2 的距離。

解：L_1 方向向量 $\overrightarrow{v_1}=(3,2,1)$，$L_2$ 方向向量 $\overrightarrow{v_2}=(3,2,1)$ $\therefore L_1 // L_2$

在 L_1 上取一點 $A(-2,-3,2)$，

設 A 到 L_2 之投影點爲 Q，則 $\overline{AQ}$ 即爲 L_1 與 L_2 之距離

因 Q 在 L_2 上　$\therefore$ 令 $Q(1+3t, 2+2t, -3+t)$,



則 $\overrightarrow{AQ}=(3t+3,\ 2t+5,\ t-5)$ 且 $\overrightarrow{AQ}\perp\overrightarrow{v_2}$

$\Rightarrow (3t+3,\ 2t+5,\ t-5)\cdot(3,\ 2,\ 1)=0$

$\Rightarrow 14t+14=0 \Rightarrow t=-1$,

$\therefore Q(-2,\ 0,\ -4)$,

故 L_1 與 L_2 之距離爲

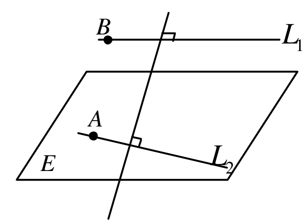
$$\overline{AQ}=\sqrt{(-2+2)^2+(-3-0)^2+(2+4)^2}=3\sqrt{5}$$

4. 已知二歪斜線 $L_1:\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y-4}{1}=\dfrac{z-8}{4}$，$L_2:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-7}{-1}$，試求

(1)含 L_2 且平行 L_1 的平面方程式。

(2)二歪斜線 L_1 與 L_2 的最短距離。

解：(1)設 E 爲包含 L_2 且平行 L_1 的平面，而其法向量爲 $\overrightarrow{n}$，



$\overrightarrow{d_1}=(-2,1,4)$ 爲 L_1 的方向向量

$\overrightarrow{d_2}=(2,2,-1)$ 爲 L_2 的方向向量

則 $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{d_1}$ 且 $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{d_2}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{n}=\overrightarrow{d_1}\times\overrightarrow{d_2}=\left(\begin{vmatrix}1&4\\2&-1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}4&-2\\-1&2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-2&1\\2&2\end{vmatrix}\right)=(-9,\ 6,\ -6)$$

又 $A(3,\ -1,\ 7)$ 在 L_2 上 $\Rightarrow$ A 亦在 E 上,

$\therefore$由點向式得平面方程式

$$-9(x-3)+6(y+1)-6(z-7)=0 \Rightarrow 3x-2y+2z-25=0$$

(2)$\because B(0,\ 4,\ 8)$ 在 L_1 上 $\therefore d(L_1,\ L_2)=d(B,\ E)=\dfrac{|0-8+16-25|}{\sqrt{3^2+(-2)^2+2^2}}=\sqrt{17}$

主題 8　綜合能力思考學練區：

1. 坐標空間中，直線 L 上距離點 Q 最近的點稱爲點 Q 在 L 上的投影點。已知 L 爲平面 $2x-y=2$ 上通過點 $(2,2,2)$ 的一直線，請問下列哪些選項中的點可能是原點 O 在 L 上的投影點？

(1) $(2,2,2)$　(2) $(2.0,2)$　(3) $(\frac{4}{5},-\frac{2}{5},0)$　(4) $(\frac{4}{5},-\frac{2}{5},-2)$　(5) $(\frac{8}{9},-\frac{2}{9},-\frac{2}{9})$

【99.學測】

解：令原點 O 在 L 上的投影點爲 B，$A(2,2,2)$

則 $\overrightarrow{OB}\perp\overrightarrow{AB}\Rightarrow\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

(1)○；$B(2,2,2)$，$\overrightarrow{OB}=(2,2,2)$，$\overrightarrow{AB}=(0,0,0)\Rightarrow\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

(2)╳；$B(2,0,2)$ 不在平面 $2x-y=2$ 上

(3)○；$B(\frac{4}{5},-\frac{2}{5},0)$，$\overrightarrow{OB}=(\frac{4}{5},-\frac{2}{5},0)$，$\overrightarrow{AB}=(-\frac{6}{5},-\frac{12}{5},-2)\Rightarrow\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

(4)╳；$B(\frac{4}{5},-\frac{2}{5},-2)$，$\overrightarrow{OB}=(\frac{4}{5},-\frac{2}{5},-2)$，$\overrightarrow{AB}=(-\frac{6}{5},-\frac{12}{5},-4)\Rightarrow\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AB}\neq 0$

(5)○；$B(\frac{8}{9},-\frac{2}{9},-\frac{2}{9})$，$\overrightarrow{OB}=(\frac{8}{9},-\frac{2}{9},-\frac{2}{9})$，

$\overrightarrow{AB}=(-\frac{10}{9},-\frac{20}{9},-\frac{20}{9})\Rightarrow\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

故選(1)(3)(5)

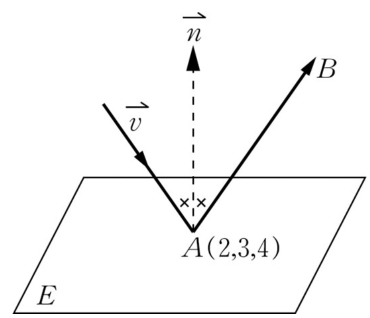
2. 一光線自 P 點沿著向量 $\vec{v}=(1,2,3)$ 的方向射向平面 E 上的點 $A(2,3,4)$，反射後通過點 $B(13,1,3)$，試求平面 E 的方程式。

解：$\overrightarrow{AB}=(11,-2,-1)$，

$|\vec{v}|=\sqrt{14}$，$\overline{AB}=3\sqrt{14}$，

又

平面 E 之法向量 $\vec{n}$ 平分 $(-\vec{v})$ 與 $\overrightarrow{AB}$ 之夾角，



故 取 $\vec{n}=(-3\vec{v})+\overrightarrow{AB}$

$=-3(1,2,3)+(11,-2,-1)$

$=(8,-8,-10)$

又 E 過點 $A(2,3,4)$

$\therefore$ 平面 E：$8x-8y-10z=-48$

即 E：$4x-4y-5z+24=0$。