

主題 1 有理數與小數磨練區：

1、若將 $\frac{1}{7}$ 化成十進位數後，試問小數點後第 100 位的數字是多少？

解： $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$ ，循環節有 6 位，
而 $100 = 6 \times 16 + 4$ ，表示 1, 4, 2, 8, 5, 7
循環 16 次後的第四個數字 8，
即小數點後第 100 位數字是 8。

2、已知 $21a6947$ 是一個七位數的整數，若 $\frac{21a6947}{132}$ 可以化為有限小數，則 a 值為何？

解： $132 = 2^2 \times 3 \times 11$ ，若 $\frac{21a6947}{132}$ 可以化為有限小數
即表示分子、分母可以約去共同因數 3 與 11
 $\therefore 3$ 能整除 $2+1+a+6+9+4+7 = 29+a$
且 11 能整除 $(2+a+9+7) - (1+6+4) = 7+a$
又 a 為介於 0 至 9 之間的整數，故 $a = 4$

3、下列選項哪些是正確？

- (1) $\frac{2}{7}$ 是有理數 (2) $\frac{\sqrt{2}}{11}$ 是有理數 (3) $0.\overline{73}$ 是有理數
(4) $0.7\overline{3}$ 是有理數 (5) $0.\overline{73} < 0.7\overline{3}$.

解： (2) $\sqrt{2}$ 為無理數 $\therefore \frac{\sqrt{2}}{11}$ 是無理數
(5) $0.\overline{73} = 0.7373\cdots$ ， $0.7\overline{3} = 0.7333\cdots$ ，故 $0.\overline{73} > 0.7\overline{3}$
故選(1)(3)(4)

4、設 a 、 b 為循環小數， $a = 0.\overline{12}$ ， $b = 0.\overline{01}$ ，則 $a - b$ 的值是下列哪一個選項？

- (1) 0.11 (2) 0.1111 (3) $\frac{1}{9}$ (4) $\frac{10}{99}$ (5) $\frac{100}{999}$ 【108. 指考乙】

解： $a - b = 0.\overline{12} - 0.\overline{01} = \frac{12}{99} - \frac{1}{99} = \frac{11}{99} = \frac{1}{9}$ ，選(3)

主題 2 無理數與實數的性質磨練區：

1、 $\sqrt{\frac{1}{5^2} + \frac{1}{4^2}} + 1$ 等於下列哪一個選項？

- (1) 1.01 (2) 1.05 (3) 1.1 (4) 1.15 (5) 1.21 【101.學測】

$$\text{解：} \sqrt{\frac{1}{5^2} + \frac{1}{4^2}} + 1 = \sqrt{\frac{4^2 + 5^2 + 5^2 \times 4^2}{5^2 \times 4^2}} = \sqrt{\frac{21^2}{20^2}} = \frac{21}{20} = 1.05, \text{ 選(2)}$$

2、設 $a = \sqrt{7 + \sqrt{47}}$ ，則 a 在哪兩個連續整數之間？

- (1) 0 與 1 (2) 1 與 2 (3) 2 與 3 (4) 3 與 4 (5) 4 與 5。

$$\text{解：} \because 6 < \sqrt{47} < 7 \therefore \sqrt{7+6} < \sqrt{7+\sqrt{47}} < \sqrt{7+7}$$

$$\text{即 } \sqrt{13} < \sqrt{7+\sqrt{47}} < \sqrt{14}$$

$$\Rightarrow \sqrt{9} < \sqrt{13} < \sqrt{7+\sqrt{47}} < \sqrt{14} < \sqrt{16}$$

$$\Rightarrow 3 < a < 4$$

故選(4)

3、已知 k 為正整數且 $\frac{k}{17} < \sqrt{7} < \frac{k+1}{17}$ ，試求 k 值。

$$\text{解：} \text{由 } \frac{k}{17} < \sqrt{7} < \frac{k+1}{17} \text{ 得 } k^2 < 7 \times 17^2 < (k+1)^2 \Rightarrow k^2 < 2023 < (k+1)^2$$

$$\text{又知 } 44^2 < 2023 < 45^2 \therefore k = 44$$

4、若實數 a, b, c 滿足 $abc > 0$, $ab+bc+ca < 0$, $a+b+c > 0$, $a > b > c$, 則下列選項何者為真?

(1) $a > 0$ (2) $b > 0$ (3) $c > 0$

(4) $|a| > |b|$ (5) $a^2 > c^2$.

【解】：(a) $\because abc > 0$, $\therefore a, b, c$ 為三正或一正二負

但若 a, b, c 皆為正，則 $ab+bc+ca > 0$ 與 $ab+bc+ca < 0$ 矛盾

故 a, b, c 必為一正二負

(b) 已知 $a > b > c$ ，由(1)知 $a > 0$, $b < 0$, $c < 0$

(c) 由 $a+b+c > 0 \Rightarrow |a| > |b|+|c| > |b|$

(d) 由 $a+b+c > 0 \Rightarrow |a| > |b|+|c| > |c| \Rightarrow a^2 > c^2$

選(1)(4)(5)

用心經營

創造價值

主題 3 乘法公式與方根的運算磨練區：

1、設 $A=3-\sqrt{6}$ ， $B=\sqrt{10}-\sqrt{5}$ ， $C=2\sqrt{2}-\sqrt{7}$ ，則 A ， B ， C 三數的大小順序為

- (1) $A > B > C$ (2) $A > C > B$ (3) $B > A > C$ (4) $B > C > A$ (5) $C > A > B$

解： $A^2 = (3-\sqrt{6})^2 = 9 - 2 \times 3 \times \sqrt{6} + (\sqrt{6})^2 = 15 - 2\sqrt{54}$

$$B^2 = (\sqrt{10}-\sqrt{5})^2 = (\sqrt{10})^2 - 2 \times \sqrt{10} \times \sqrt{5} + (\sqrt{5})^2 = 15 - 2\sqrt{50}$$

$$C^2 = (2\sqrt{2}-\sqrt{7})^2 = (2\sqrt{2})^2 - 2 \times 2\sqrt{2} \times \sqrt{7} + (\sqrt{7})^2 = 15 - 2\sqrt{56}$$

$\therefore \sqrt{50} < \sqrt{54} < \sqrt{56} \quad \therefore B^2 > A^2 > C^2$ 故 $B > A > C$ 。選(3)

2、設 $0 < x < 1$ ，已知 $\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2} + 2} + \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2} - 2} = 5$ ，試求 x 值。

解： $0 < x < 1 \Rightarrow x - \frac{1}{x} < 0$

故 $\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2} + 2} + \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2} - 2} = 5$

$$\Rightarrow \sqrt{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2} + \sqrt{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2} = 5$$

$$\Rightarrow \left|x + \frac{1}{x}\right| + \left|x - \frac{1}{x}\right| = 5$$

$$\Rightarrow x + \frac{1}{x} + \left(\frac{1}{x} - x\right) = 5$$

$$\Rightarrow \frac{2}{x} = 5, \text{ 解得 } x = \frac{2}{5}$$

3、設 $a = \sqrt{41 - 12\sqrt{5}}$ ， b 為 a 的小數部分，試求 $\frac{a}{4} + \frac{1}{b}$ 之值。

解： $\therefore a = \sqrt{41 - 12\sqrt{5}} = \sqrt{41 - 2\sqrt{180}} = 6 - \sqrt{5}$
 $= 3 + (3 - \sqrt{5})$

$\therefore b = 3 - \sqrt{5}$

$$\frac{a}{4} + \frac{1}{b} = \frac{6 - \sqrt{5}}{4} + \frac{1}{3 - \sqrt{5}} = \frac{6 - \sqrt{5}}{4} + \frac{3 + \sqrt{5}}{4} = \frac{9}{4}$$

Don't worry if you're slow — turtles still beat the ones who never start.

- 4、如右圖，利用一條長 40 公尺的繩子，一邊靠牆，圍成一個矩形，靠牆的一邊不圍繩子，則所圍出的矩形面積最大為_____平方公尺。

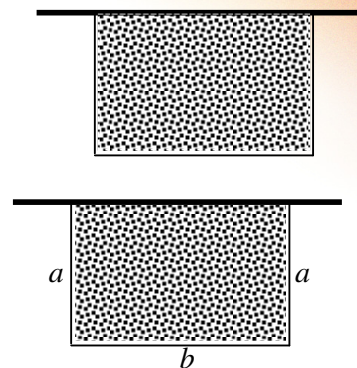
解：設矩形的長為 b 公尺、寬為 a 公尺，依題意知 $2a + b = 40$

$$\text{由算幾不等式 } \frac{2a+b}{2} \geq \sqrt{(2a) \times b}$$

$$\text{得 } \frac{40}{2} \geq \sqrt{2ab}$$

$$\text{即 } 2ab \leq 400 \Rightarrow ab \leq 200$$

故矩形面積最大為 200 平方公尺



- 5、已知 $a > 0$ ，試求 $a + \frac{36}{a}$ 的最小值，及產生最小值時的 a 值。

解：由算幾不等式知 $\frac{a + \frac{36}{a}}{2} \geq \sqrt{a \times \frac{36}{a}}$

$$\text{故 } a + \frac{36}{a} \geq 2 \times 6, \text{ 即 } a + \frac{36}{a} \geq 12$$

所以 $a + \frac{36}{a}$ 的最小值為 12，此時 $a = \frac{36}{a} = 6$ 。

主題 4 數線上分點公式密練區：

1、三個相異實數 a 、 b 、 c 滿足 $b = \frac{4}{5}a + \frac{1}{5}c$ ，如果將 a 、 b 、 c 標示在數線上，

(1) b 在 a 與 c 之間 (2) $c > b$ (3) 若 $d = \frac{4}{3}a - \frac{1}{3}c$ ，則 d 在 a 與 b 之間

(4) a 到 c 的距離是 a 到 b 的距離的 5 倍 (5) 如果 $|b| = \frac{4}{5}|a| + \frac{1}{5}|c|$ ，則 $a \cdot b \cdot c > 0$

【103.指考乙】

解：令數線上四點 A, B, C, D 的坐標分別是 a, b, c, d

(1) 對；由分點公式可知， B 點在線段 \overline{AC} 上，且 $\overline{AB} : \overline{BC} = 1 : 4$

(2) 錯；不一定，例如 $c = -4, a = 1, b = 0$

(3) 錯；移項整理可得 $a = \frac{1}{4}c + \frac{3}{4}d$ ，故 A 點在線段 \overline{CD} 上，但 B 點在線段 \overline{AC}

上，故 D 點不在線段 \overline{AB} 上

(4) 對；因 $\overline{AB} : \overline{BC} = 1 : 4$ 且 B 點在線段 \overline{AC} 上，故 $\overline{AC} : \overline{AB} = 5 : 1$

(5) 錯；反例為 $a = 0, b = 1, c = 5$ ，則 $a \cdot b \cdot c = 0$

故選(1)(4)

創造價值

主題 5 絕對值方程式與絕對值不等式練習區：

1、設 a 、 b 為實數，若 $|2x-a|>b$ 之解為 $x>7$ 或 $x<-3$ ，則 $a+b=$ _____。

$$\text{解：由 } x>7 \text{ 或 } x<-3 \Leftrightarrow \left| x - \frac{7+(-3)}{2} \right| > \frac{7-(-3)}{2}$$

$$\Leftrightarrow |x-2|>5 \Leftrightarrow |2x-4|>10$$

$$\therefore a=4, b=10, \text{ 故 } a+b=14$$

2、請問滿足絕對值不等式 $|4x-12|\leq 2x$ 的實數 x 所形成的區間，其長度為下列哪一個選項？

- (1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4 (5) 6

$$\text{解：} |4x-12|\leq 2x \Rightarrow |2x-6|\leq x$$

$$\Rightarrow (2x-6)^2 \leq x^2 \Rightarrow 3x^2 - 24x + 36 \leq 0$$

$$\text{得 } x^2 - 8x + 12 \leq 0 \text{ 即 } (x-2)(x-6) \leq 0$$

所以 $2 \leq x \leq 6$ ，故長度 $6-2=4$ ，選(4)

3、將三隻螞蟻放在數線上，而且三隻螞蟻都沿著數線移動，在某個時刻三隻螞蟻的位置分別在 $A(8)$ ， $B(-2)$ ， $P(x)$ ，已知此刻三隻螞蟻彼此的距離和為 24，試問 x 的值是多少？

$$\text{解：依題意可得 } \overline{PA} + \overline{PB} + \overline{AB} = 24$$

$$\text{又 } \overline{AB} = |8 - (-2)| = 10, \overline{PA} = |x - 8|, \overline{PB} = |x + 2|,$$

$$\text{故 } |x + 2| + |x - 8| = 14,$$

$$\text{利用幾何概念，因為 } \overline{AB} = |8 - (-2)| = 10 < 14,$$

所以滿足 $|x + 2| + |x - 8| = 14$ ， P 點落在 A 點的右邊或 B 點的左邊，

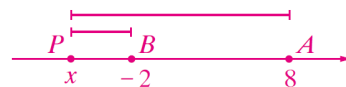
① P 點落在 A 點的右邊，如圖所示，

$$\text{則 } x + 2 + x - 8 = 14, \text{ 解得 } x = 10.$$

② P 點落在 B 點的左邊，如圖所示，

$$\text{則 } -(x + 2) + [-(x - 8)] = 14, \text{ 解得 } x = -4.$$

由①②得 $|x + 2| + |x - 8| = 14$ 的解為 $x = 10$ 或 $x = -4$.



Don't worry if you're slow — turtles still beat the ones who never start.

4、試求絕對值不等式 $|x-4|+|x+2|<10$ 的解。

解：令 $|x-4|=0$, $|x+2|=0$, 得 $x=4$ 及 $x=-2$

將數線以 $x=4$ 及 -2 為界分成三個區間，圖示：

①當 $x \geq 4$ 時, $x-4 \geq 0$, $x+2 > 0$,

$$\text{則原式} \Rightarrow (x-4)+(x+2) < 10 \Rightarrow 2x-2 < 10 \Rightarrow x < 6$$

$$\text{又 } x \geq 4 \quad \therefore 4 \leq x < 6$$

②當 $-2 \leq x < 4$ 時, $x-4 < 0$, $x+2 \geq 0$,

$$\text{則原式} \Rightarrow -(x-4)+(x+2) < 10 \Rightarrow 6 < 10 \text{ (恆成立)}$$

$\therefore -2 \leq x < 4$ 中, 所有的 x 皆成立

③當 $x < -2$ 時, $x-4 < 0$, $x+2 < 0$,

$$\text{則原式} \Rightarrow -(x-4)-(x+2) < 10 \Rightarrow -2x+2 < 10 \Rightarrow x > -4$$

$$\text{又 } x < -2 \quad \therefore -4 < x < -2$$

由①②③皆成立, 得, 故 $-4 < x < 6$

用心經營

創造價值

主題 6 指數律的意義與性質磨練區：

1、某個手機程式，每次點擊螢幕上的數 a 後，螢幕上的數會變成 a^2 。當一開始時螢幕上的數 b 為正且連續點擊螢幕三次後，螢幕上的數接近 81^3 。試問實數 b 最接近下列哪一個選項？

- (1) 1.7 (2) 3 (3) 5.2 (4) 9 (5) 81 【106.學測】

解：依題意可知 $b \rightarrow b^2 \rightarrow (b^2)^2 = b^4 \rightarrow (b^4)^2 = b^8$

$$\text{由 } b^8 = 81^3 = (3^4)^3 = 3^{12}$$

$$\text{可得 } (b^2)^4 = (3^3)^4 \Rightarrow b^2 = 3^3 = 27$$

$$\text{故 } b = \sqrt{27} \approx 5.2, \text{ 選 (3)}$$

2、小明身體不舒服，需依照醫生指示服藥。假設在吞藥後 t 小時，殘留在胃裡的藥量尚有 $M(t) = 450 \times (0.64)^t$ 毫克，求：

(1)經過1.5小時後藥量殘存為_____毫克。

(2)自 t 小時到 $t+1$ 小時內吸收的藥量，與第 t 小時殘存藥量的比值為_____。

解：(1) $\because M(t) = 450 \times (0.64)^t$

$$\therefore M(1.5) = 450 \times (0.64)^{1.5} = 450 \times [(0.8)^2]^{\frac{3}{2}}$$

$$= 450 \times (0.8)^3 = 450 \times 0.512 = 230.4 \text{ (毫克)}$$

$$(2)\text{由題意知，所求} = \frac{M(t) - M(t+1)}{M(t)} = \frac{M(t)}{M(t)} - \frac{M(t+1)}{M(t)}$$

$$= 1 - \frac{450 \times (0.64)^{t+1}}{450 \times (0.64)^t} = 1 - (0.64) = 0.36$$

主題 7 科學記號與常用對數磨練區：

1、已知 a 、 b 為正整數且 a 與 b 的乘積是 11 位數，而 $\frac{a}{b}$ 化成小數後的整數部分是 2 位數，

則 a 可能為幾位數？

- (1) 5 位數 (2) 6 位數 (3) 7 位數 (4) 8 位數 (9) 5 位數

【大考中心 111 學測參考試卷】

解：依題意知

$$10^{10} \leq ab < 10^{11} \quad \text{且} \quad 10 \leq \frac{a}{b} < 10^2$$

$$\text{兩式相乘得 } 10^{11} \leq a^2 < 10^{13} \Rightarrow 10^{5.5} \leq a < 10^{6.5}$$

故 a 可能為 6 位數或 7 位數，選(2)(3)

2、設正實數 b 滿足 $(\log 100)(\log b) + \log 100 + \log b = 7$ 。試選出正確的選項。

- (1) $1 \leq b \leq \sqrt{10}$ (2) $\sqrt{10} \leq b \leq 10$ (3) $10 \leq b \leq 10\sqrt{10}$
 (4) $10\sqrt{10} \leq b \leq 100$ (5) $100 \leq b \leq 100\sqrt{10}$ 【108.學測】

解： $(\log 100)(\log b) + \log 100 + \log b = 7 \Rightarrow 2 \log b + 2 + \log b = 7$

$$\text{整理得 } 3 \log b = 5 \Rightarrow \log b = \frac{5}{3} \Rightarrow b = 10^{\frac{5}{3}}$$

故 $1 < 10^{\frac{5}{3}} < 10^2$ ，即 $1 < b < 100$

合於上述的為 $10\sqrt{10} < b < 100$ ，選(4)。

3、已知 pH 值為溶液中氫離子濃度的一種標度，也就是溶液酸鹼程度的衡量標準，其 pH 值定義為 $-\log [H^+]$ ， $[H^+]$ 為溶液中氫離子濃度。一般洗面乳的酸鹼值都以接近皮膚的平均酸鹼性為佳，今有 A 牌洗面乳標示其 pH 值為 5.6，B 牌洗面乳標示其 pH 值 5.9。試問 A 牌洗面乳的氫離子濃度大約是 B 牌洗面乳的幾倍？

(已知 $\log 2 \approx 0.3010$ ， $\log 3 \approx 0.4771$)

- (1) 0.3 倍 (2) 1 倍 (3) 2 倍 (4) 3 倍 (5) 5 倍。

解：依題意知

$$5.6 = -\log [H^+]_A \Rightarrow \log [H^+]_A = -5.6 \quad \therefore [H^+]_A = 10^{-5.6}$$

$$\text{又 } 5.9 = -\log [H^+]_B \Rightarrow \log [H^+]_B = -5.9 \quad \therefore [H^+]_B = 10^{-5.9}$$

$$\frac{[H^+]_A}{[H^+]_B} = \frac{10^{-5.6}}{10^{-5.9}} = 10^{0.3} \approx 10^{0.3010} \approx 2$$

故 A 牌洗面乳的氫離子濃度大約是 B 牌洗面乳的 2 倍，故選(3)。