主題 1　多項式概念暨練習：

1、設 $x^2+2=ax(x+1)+b(x+1)(x+2)+cx(x+2)$，求 $a+b+c$ 之值。

解：以 $x=0$ 代入得 $0+2=0+2b+0$　$\therefore b=1$

以 $x=-1$ 代入得 $1+2=0+0-c$　$\therefore c=-3$

以 $x=-2$ 代入得 $4+2=2a+0+0$　$\therefore a=3$

故 $a+b+c=1$

2、設 $f(x)=(x^3+4x^2-5x+2)^3=a_9x^9+a_8x^8+\cdots\cdots+a_1x+a_0$，試求

(1) $a_0=$__________

(2) $a_0+a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_8+a_9=$__________

(3) $a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=$__________

解：(1) $a_0=f(0)=2^3=8$

(2) $a_0+a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_8+a_9$ 為

所有係數和 $=f(1)=(1+4-5+2)^3=8$

(3) $f(-1)=(-1+4+5+2)^3=10^3=1000$

$a_1+a_3+a_5+a_7+a_9$ 為

奇次項係數和 $=\dfrac{f(1)-f(-1)}{2}=\dfrac{8-1000}{2}=-496$

3、設 $f(x)=ax^6+bx^4+3x-\sqrt{2}$，其中 a,b 為非零實數，則 $f(5)-f(-5)$ 之值為

(1) -30　(2) 0　(3) $2\sqrt{2}$　(4) 30　(5)無法確定（與 a,b 有關）

解：所求 $=(a\times5^6+b\times5^4+3\times5-\sqrt{2})-[a\times(-5)^6+b\times(-5)^4+3\times(-5)-\sqrt{2}]=30$

選(4)

主題 2　多項式的運算(除法原理與綜合除法)學練區：

1、設多項式 $2x^3+ax^2+4x-5$ 除以另一多項式 x^2-2x+b 所得的商式是 $2x+1$，餘式是 $12x-2$，求 $a+b$ 的值。

解：由除法原理知 $2x^3+ax^2+4x-5=(x^2-2x+b)(2x+1)+12x-2$

整理得 $2x^3+ax^2-8x-3=(x^2-2x+b)(2x+1)$

比較係數得 $a=1+(-2)\times 2=-3$，$b=-3$

所以 $a+b=-6$

2、已知多項式 $f(x)$ 除以 x^2+5x+1 後，所得出的商式爲 x^3+7x^2+x+3，試選出下列可能爲 $f(x)$ 的選項

(1) $2(x^3+7x^2+x+3)(x^2+5x+1)$
(2) $(x^3+7x^2+x+3)(x^2+5x+1)-x$
(3) $(x^3+7x^2+x+3)(x^2+5x+1)+x^2$
(4) $(x^3+7x^2+x+4)(x^2+5x+1)-x$
(5) $(x^3+7x^2+x+4)(x^2+5x+1)-x^2$　　【113.學測 B】

解：由除法原理知 $f(x)=(x^2+5x+1)(x^3+7x^2+x+3)+R(x)$

其中 $\deg R(x)<2$ 或 $R(x)=0$

(1)錯：若 $R(x)=0\Rightarrow f(x)=(x^2+5x+1)(x^3+7x^2+x+3)$

(2)對：$(x^3+7x^2+x+3)(x^2+5x+1)-x$，$R(x)=-x$，合

(3)錯：$R(x)=x^2$，不合

(4)錯：$(x^3+7x^2+x+4)(x^2+5x+1)-x=(x^3+7x^2+x+3)(x^2+5x+1)+(x^2+5x+1)-x$

$=(x^3+7x^2+x+3)(x^2+5x+1)+x^2+4x+1$，$R(x)=x^2+4x+1$，不合

(5)對：$(x^3+7x^2+x+4)(x^2+5x+1)-x^2=(x^3+7x^2+x+3)(x^2+5x+1)+(x^2+5x+1)-x^2$

$=(x^3+7x^2+x+3)(x^2+5x+1)+5x+1$，，$R(x)=5x+1$，合

故選(2)(5)

3、設 $f(x)$ 爲一多項式。若 $(x+1)f(x)$ 除以 x^2+x+1 的餘式爲 $5x+3$，則 $f(x)$ 除以 x^2+x+1 的餘式爲__________。

解：由除法原理 設 $f(x)=(x^2+x+1)Q(x)+ax+b$

則 $(x+1)f(x)=(x+1)[(x^2+x+1)Q(x)+ax+b]$

$$=(x+1)(x^2+x+1)Q(x)+(x+1)(ax+b)$$
$$=(x+1)(x^2+x+1)Q(x)+[ax^2+(b+a)x+b]$$
$$=(x^2+x+1)[(x+1)Q(x)+a]+bx+(b-a)$$

$\therefore bx+b-a=5x+3$ 得 $b=5$，$a=2$

故所求餘式爲 $2x+5$

> 除式爲二次式時，
> 餘式必須低於二次。
> 故 $ax^2+(a+b)x+b$
> $=(x^2+x+1)\times a$
> $+bx+(b-a)$

4、某甲計算多項式 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 除以 $g(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 的餘式，其中 a、b、c、d 爲實數，且 $a\neq 0$。他誤看成 $g(x)$ 除以 $f(x)$，計算後得出餘式爲 $-3x-17$。假設 $f(x)$ 除以 $g(x)$ 正確的餘式等於 px^2+qx+r，則 p 的值會等於下列哪個選項？

(1) -3　(2) -1　(3) 0　(4) 2　(5) 3　【112.學測 B】

解：依題意，由除法原理

知 $g(x)=a\times f(x)+(-3x-17)$

$$\therefore f(x)=\frac{1}{a}[g(x)+(3x+17)]=\frac{1}{a}g(x)+(\frac{3}{a}x+\frac{17}{a})$$

即餘式爲 $px^2+qx+r=\frac{3}{a}x+\frac{17}{a}, a\neq 0$，得 $p=0$，故選(3)

5、已知 $f(x)$、$g(x)$、$h(x)$ 皆爲實係數三次多項式，且除以 x^2-2x+3 的餘式分別爲 $x+1$、$x-3$、-2。若 $xf(x)+ag(x)+bh(x)$ 可以被 x^2-2x+3 整除，其中 a,b 爲實數，則 $a=$ ______，$b=$ ____。　【113.學測 A】

解：依題意

令 $f(x)=(x^2-2x+3)q_1(x)+x+1$、

$g(x)=(x^2-2x+3)q_2(x)+x-3$、

$h(x)=(x^2-2x+3)q_3(x)-2$

所以 $xf(x)+ag(x)+bh(x)$

$$=x(x^2-2x+3)q_1(x)+x(x+1)+a(x^2-2x+3)q_2(x)+a(x-3)+b(x^2-2x+3)q_3(x)-2b$$
$$=(x^2-2x+3)[xq_1(x)+aq_2(x)+bq_3(x)]+x^2+(a+1)x-3a-2b$$

又 $xf(x)+ag(x)+bh(x)$ 被 x^2-2x+3 整除

即 $x^2+(a+1)x-3a-2b$ 被 x^2-2x+3 整除

$$\therefore\begin{cases}a+1=-2\\-3a-2b=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-3\\b=3\end{cases}$$

6、設 $f(x)=x^4-3x^3+x^2+x+19$

(1)若 $f(x)=a(x-2)^4+b(x-2)^3+c(x-2)^2+d(x-2)+e$，則序對 $(a,b,c,d,e)=$__________。

(2) $(x-2)^2$ 除 $f(x)$ 的餘式為__$x+15$__。

(3) $f(2.002)$ 的近似值為__17.002__（四捨五入至小數第三位）。

(4) $f(2+\sqrt{3})=$__$47+16\sqrt{3}$__。

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
1 & -3 & +1 & +1 & +19 & 2 \\
 & +2 & -2 & -2 & -2 & \\
\hline
1 & -1 & -1 & -1 & +17 \leftarrow e & \\
 & +2 & +2 & +2 & & \\
\hline
1 & +1 & +1 & +1 \leftarrow d & & \\
 & +2 & +6 & & & \\
\hline
1 & +3 & +7 \leftarrow c & & & \\
 & +2 & & & & \\
\hline
1 & +5 \leftarrow b & & & & \\
\uparrow & & & & & \\
a & & & & &
\end{array}
$$

解：(1)利用綜合除法如右所示，

$$f(x)=(x-2)^4+5(x-2)^3+7(x-2)^2+(x-2)+17$$

故 $(a,b,c,d,e)=(1,5,7,1,17)$

(2)因為 $f(x)=(x-2)^4+5(x-2)^3+7(x-2)^2+(x-2)+17$

所以 $f(x)\div(x-2)^2$ 之餘式為 $(x-2)+17=x+15$

(3) $f(2.002)=(0.002)^4+5(0.002)^3+7(0.002)^2+(0.002)+17\approx 17.002$

(4) $f(\sqrt{3}+2)=(\sqrt{3})^4+5(\sqrt{3})^3+7(\sqrt{3})^2+(\sqrt{3})+17=47+16\sqrt{3}$

主題 3　餘式定理與因式定理學練區：

1、設 $f(x)$ 與 $g(x)$ 爲實係數多項式，以 x^2-3x+2 除 $f(x)$ 得餘式 $3x-5$，以 $x-1$ 除 $g(x)$ 得餘式 5，試求以 $x-1$ 除 $2f(x)+3g(x)$ 的餘式。

解：由題意知

$f(x)=(x^2-3x+2)Q_1(x)+3x-5 \Rightarrow f(1)=3\times1-5=-2$

$g(x)=(x-1)Q_2(x)+5 \Rightarrow g(1)=5$

$\therefore x-1$ 除 $2f(x)+3g(x)$ 的餘式爲 $2f(1)+3g(1)=2(-2)+3\times5=11$

2、設多項式 $f(x)$ 除以 x^2-5x+4，餘式爲 $x+2$；除以 x^2-5x+6，餘式爲 $3x+4$。則多項式 $f(x)$ 除以 x^2-4x+3，餘式爲__________。

解：由 $f(x)=(x^2-5x+4)Q_1(x)+x+2=(x-1)(x-4)Q_1(x)+x+2$，

$f(x)=(x^2-5x+6)Q_2(x)+3x+4=(x-2)(x-3)Q_2(x)+3x+4$

知 $f(1)=3$，$f(3)=13$

設 $f(x)=(x-1)(x-3)Q(x)+ax+b$

則 $f(1)=a+b=3$，$f(3)=3a+b=13$

解得 $a=5$，$b=-2$，故所求餘式爲 $5x-2$

3、已知 $f(x)$ 爲三次多項式，滿足 $f(-2)=f(-1)=f(2)=5$，且 $f(3)=65$，試求
(1) $f(x)=$______________。　(2) $f(-3)=$__________。

解：(1)根據題意，令 $f(x)=a(x+2)(x+1)(x-2)+5$

又　$f(3)=65$

所以　$a(3+2)(3+1)(3-2)+5=65$

解得　$a=3$

故　$f(x)=3(x+2)(x+1)(x-2)+5=3x^3+3x^2-12x-7$

(2)承(1)

$f(-3)=3(-3+2)(-3+1)(-3-2)+5=-25$

4、多項式 $(x^5+x^2+2x+3)^3$ 除以 (x^4+x+1) 所得的餘式爲__________。

解：$\because x^5+x^2+2x+3=(x^4+x+1)\times x+(x+3)$

$\therefore (x^5+x^2+2x+3)^3=[x(x^4+x+1)+(x+3)]^3$

以 $x^4=-x-1$ 代入得餘式　$[x(-x-1+x+1)+(x+3)]^3=(x+3)^3$

故 $(x^5+x^2+2x+3)^3$ 除以 (x^4+x+1) 所得的餘式爲 $(x+3)^3$

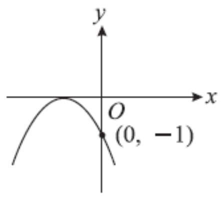
主題 4　一次函數與二次函數實練區：

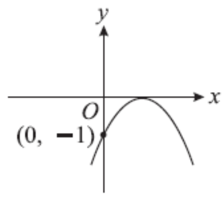
1、設 a，b，c 為實數。若二次函數 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的圖形通過 $(0,-1)$ 且與 x 軸相切，則下列選項何者為真？

(1) $a<0$　(2) $b>0$　(3) $c=-1$　(4) $b^2+4ac=0$　(5) $a+b+c\le 0$

解：二次函數 $y=f(x)$ 的圖形通過 $(0,\ -1)$，且與 x 軸相切，

其圖形如下





(1)圖形開口向下　$\therefore a<0$

(2)頂點 $\left(-\dfrac{b}{2a},\ -\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right)$ 可能在 x 軸正方向，也可能在 x 軸負方向

$\therefore b$ 無法判斷正負

(3)與 y 軸交點 $(0,-1)\Rightarrow c=-1$

(4)與 x 軸相切 $\Rightarrow b^2-4ac=0$　$\therefore b^2+4ac=8ac>0$

(5)由圖知 $f(1)\le 0\Rightarrow a+b+c\le 0$

故選(1)(3)(5)

2、已知二次函數 $f(x)=ax^2+bx+7$ 在 $x=1$ 時有最小值 4，則數對 $(a,b)=$ ＿＿＿＿＿＿。

解：$\because f(x)$ 在 $x=1$ 時有最小值 4

$\therefore f(x)=a(x-1)^2+4$，且 $a>0$

故　$a(x-1)^2+4=ax^2+bx+7$，即　$ax^2-2ax+a+4=ax^2+bx+7$

$\Rightarrow \begin{cases} a+4=7 \\ b=-2a \end{cases} \Rightarrow\ a=3$，$b=-6$　$\therefore (a,b)=(3,-6)$

3、小華從一高處向空中斜拋一物體，已知此物體在距地面 16 公尺高的地方飛出，經過的路徑為拋物線（物體距離地面的高度 y 公尺是時間 t 的二次函數，此物體飛出 8 秒後落地, 6 秒時恰與飛出處等高度，則此物體最高時距離地面＿＿＿＿公尺。

解：設 $y=a(t-3)^2+k$，則 $\begin{cases} 16=a(6-3)^2+k \\ 0=a(8-3)^2+k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9a+k=16 \\ 25a+k=0 \end{cases}$，解得 $a=-1$，$k=25$，

所以拋物線為 $y=-(t-3)^2+25$，即當 $t=3$ 時，最大高度為 25 公尺.

主題 5 三次函數彎練區：

1、設 $f(x)=2x^3-3x+1$，下列關於函數 $y=f(x)$ 的圖形之描述，試選出正確的選項。
(1) $y=f(x)$ 的圖形通過點 $(1,0)$
(2) $y=f(x)$ 的圖形與 x 軸只有一個交點
(3) 點 $(1,0)$ 是 $y=f(x)$ 的圖形之對稱中心
(4) $y=f(x)$ 的圖形在對稱中心附近會近似於一直線 $y=3x-3$
(5) $y=3x^3-6x^2+2x$ 的圖形可由 $y=f(x)$ 的圖形經適當平移得到
【111.學測 B】

解：(1)對：將 $x=1$ 代入 $f(x)\Rightarrow f(1)=2-3+1=0$
$\therefore (1,0)$ 在 $y=f(x)$ 的圖形上
(2)錯：$\because f(1)=0$，$\therefore f(x)=0$ 有 $x-1$ 的因式 $\Rightarrow f(x)=(x-1)(2x^2+2x-1)$
又 $2x^2+2x-1=0$ 有兩個相異實根 $\Rightarrow f(x)=0$ 有三個相異實根
即 $y=f(x)$ 的圖形與 x 軸有三個交點
(3)錯：$f(x)=2x^3-3x+1$ 對稱中心爲 $(0,1)$
(4)錯：由 $f(x)=2x^3-3x+1\Rightarrow$ 一次近似爲 $y=-3x+1$
(5)錯：$\because$ 領導係數不同，$\therefore$ 無法由平移得到
故選(1)

2、設三次函數 $y=f(x)=a(x-1)^2+b(x-1)+c$。已知廣域看 $y=f(x)$ 的圖形會很接近 $y=-2x^3$ 的圖形，而局部看 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 附近的圖形卻近似於直線 $y=5x-3$。選出下列正確的選項：
(1) $a=-2$　(2) $b=5$　(3) $c=-3$　(4) $y=f(x)$ 圖形的對稱中心爲 $(1,f(1))$
(5) $y=f(x)$ 的圖形是 $y=-2x^3+5x$ 的圖形向右平移 1 單位，向上平移 2 單位所得

解：(1)對；由三次函數的廣域特徵知 $a=-2$。
(2)對；(3)錯；局部特徵知 $y=b(x-1)+c=5x-3$，得 $b=5$，$c=2$
(4)對；$y=f(x)$ 圖形的對稱中心爲 $(1,f(1))$
(5)對；$y=f(x)$ 的圖形是 $y=-2x^3+5x$ 的圖形向右平移 1 單位，
向上平移 2 單位所得
故選(1)(2)(4)(5)

3、已知實係數三次多項式 $f(x)$ 除以 $x+6$ 得商式 $q(x)$ 和餘式 3。若 $q(x)$ 在 $x=-6$ 有最大值 8，則 $y=f(x)$ 圖形的對稱中心坐標爲________。
【114.學測 A】

解：依題意知 $f(x)=(x+6)\cdot q(x)+3$
又二次函數 $q(x)$ 在 $x=-6$ 有最大值 8，可令 $q(x)=a(x+6)^2+8, a<0$
則 $f(x)=(x+6)\cdot(a(x+6)^2+8)+3=a(x+6)^3+8(x+6)+3$
故對稱中心爲 $(-6,3)$

4、設多項式 $f(x)=2x^3+6x^2+3x-5=a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d$，選出正確的選項。

(1) $c(x+1)+d=-3x-7$　　(2) $b=0$

(3)函數 $y=f(x)$ 的圖形向左平移 1 單位，再向下平移 4 單位之後，所得的圖形會對稱於原點

(4) $\dfrac{f(-0.99)-f(-1.01)}{0.02}$ 之值四捨五入到整數爲 -3

(5) $f(-0.98)+f(-1.02)<f(1)+f(-3)$。

解：由連續綜合除法可知

$f(x)=2x^3+6x^2+3x-5=2(x+1)^3-3(x+1)-4$。

(1)對；$c(x+1)+d=-3(x+1)-4=-3x-7$。

(2)對；$b=0$。

(3)錯；$f(x)=2x^3+6x^2+3x-5=2(x+1)^3-3(x+1)-4$
的對稱中心爲 $(-1,-4)$，
故函數 $y=f(x)$ 的圖形向右平移 1 單位，再向上平移 4 單位之後，
所得的圖形才會對稱於原點。

(4)對；函數 $y=f(x)$ 的圖形在 $x=-1$ 附近，
其圖形近似於 $-3(x+1)-4=-3x-7$，故 $\dfrac{f(-0.99)-f(-1.01)}{0.02}\approx-3$ (斜率)

(5)錯；$f(x)=2x^3+6x^2+3x-5=2(x+1)^3-3(x+1)-4$ 的對稱中心爲 $(-1,-4)$，
$\therefore f(-0.98)+f(-1.02)=f(1)+f(-3)=-8$。

故選(1)(2)(4)

主題 6　二次不等式學練區：

1、試解下列二次不等式：

(1) $x^2-5x-6<0$.

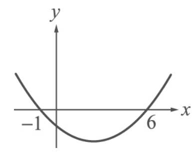
(2) $x^2-2x-2>0$

(3) $9x^2-12x+5\geq 0$.

解：(1)令 $y=x^2-5x-6$,

即 $y=(x-6)(x+1)$，如圖,

故 $x^2-5x-6<0$ 的解爲 $-1<x<6$.



(2)令 $x^2-2x-2=0 \Rightarrow x=\dfrac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\times1\times(-2)}}{2}$

即　$x=1-\sqrt{3}$ 或 $x=1+\sqrt{3}$

$\therefore x^2-2x-2>0 \Rightarrow [x-(1-\sqrt{3})][x-(1+\sqrt{3})]>0$

故其解爲　$x>1+\sqrt{3}$ 或 $x<1-\sqrt{3}$

(3) $\because 9x^2-12x+5=9(x-\dfrac{2}{3})^2+1>0$

$\therefore 9x^2-12x+5\geq 0$ 的解爲任意實數

2、若二次函數 $y=ax^2+6x+(a+11)$ 之圖形均在直線 $y=-2x+5$ 的下方，求 a 的範圍。

解：$\because y=ax^2+6x+(a+11)$ 的圖形恆在直線 $y=-2x+5$ 的下方

$\therefore ax^2+6x+(a+11)<-2x+5$ 恆成立

即 $ax^2+8x+(a+6)<0$ 恆成立

故 $\begin{cases} a<0 \\ 8^2-4a(a+6)<0 \end{cases}$

由　$8^2-4a(a+6)<0$　得　$64-4a^2-24a<0$

整理得　$a^2+6a-16>0 \Rightarrow$　$a>2$　或　$a<-8$ ……①

又由 $a<0$ ……②

綜合①②知當 $a<-8$　時，

二次函數 $y=ax^2+6x+(a+11)$ 之圖形均在直線 $y=-2x+5$ 的下方。

3、設 $f(x), g(x)$ 皆爲實係數多項式，其中 $g(x)$ 是首項係數爲正的二次式。已知 $(g(x))^2$ 除以 $f(x)$ 的餘式爲 $g(x)$，且 $y=f(x)$ 的圖形與 x 軸無交點。試選出<u>不可能</u>是 $y=g(x)$ 圖形頂點的 y 坐標之選項。

(1) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　(2) 1　(3) $\sqrt{2}$　(4) 2　(5) π　【111.學測 A】

解：依題意，可設 $(g(x))^2=f(x)\cdot Q(x)+g(x)$

$\because \deg g(x)=2$，$\therefore \deg(g(x))^2=4$

$\Rightarrow \deg f(x)=3$ 或 4，但 $y=f(x)$ 的圖形與 x 軸無交點

$\therefore \deg f(x)=4$，則 $\deg Q(x)=0$

故　$(g(x))^2=f(x)\cdot A+g(x)$

所以 $(g(x))^2-g(x)=f(x)\cdot A>0$ (因爲 $g(x))^2-g(x)$ 不可能恆小於 0)

由 $g(x))^2-g(x)=g(x)(g(x)-1)>0$

$\Rightarrow g(x)>1$ 或 $g(x)<0$ ($g(x)$ 首項係數爲正，不合)

故 $g(x)>1$，選(1)(2)

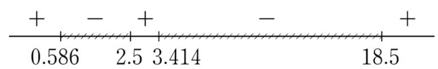
主題 7　高次不等式markdown練區：

1、試問不等式 $(x^2-4x+2)(2x-5)(2x-37)\le 0$ 有多少個整數解？

解：$(x^2-4x+2)(2x-5)(2x-37)\le 0$，

$[x-(2+\sqrt{2})][x-(2-\sqrt{2})]\cdot(2x-5)(2x-37)\le 0$，

又 $2+\sqrt{2}\approx 3.414$，$2-\sqrt{2}\approx 0.586$，$\frac{5}{2}=2.5$，$\frac{37}{2}=18.5$



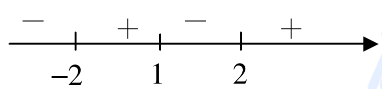
$\Rightarrow 2-\sqrt{2}\le x\le \frac{5}{2}$ 或 $2+\sqrt{2}\le x\le \frac{37}{2}$

$\therefore x=1$，2，4，5，6，…，18 共 17 個整數解

2、解下列各不等式

(1) $\frac{(x+2)(x-1)}{(x-2)}\le 0$　(2) $\frac{3}{x+2}<x$

解：(1) 原式 $\Rightarrow (x+2)(x-1)(x-2)\le 0$，但 $x\ne 2$

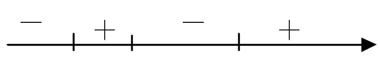


故解爲 $x\le -1$ 或 $1\le x<2$

(2) $\frac{3}{x+2}<x \Rightarrow \frac{3}{x+2}-x<0$

$\Rightarrow \frac{3-x(x+2)}{x+2}<0 \Rightarrow \frac{x^2+2x-3}{x+2}>0$

$\Rightarrow (x^2+2x-3)(x+2)>0 \Rightarrow (x+3)(x-1)(x+2)>0$



$\Rightarrow -3<x<-2$ 或 $x>1$

故解爲 $-3<x<2$　或　$x>1$