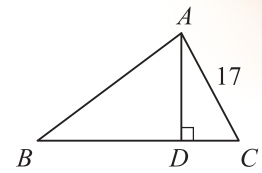
主題 1　直角三角形的三角比實練區：

1、如圖，$\triangle ABC$ 中，$\overline{AD}\perp\overline{BC}$，已知 $\overline{AC}=17$，$\sin B=\dfrac{3}{5}$，$\sin C=\dfrac{15}{17}$，求 $\overline{BC}$ 之值。



解：由於 $\sin C=\dfrac{15}{17}$，又 $\overline{AC}=17\Rightarrow\overline{AD}=15$

因此 $\overline{CD}=\sqrt{17^2-15^2}=\sqrt{64}=8$

又 $\sin B=\dfrac{3}{5}=\dfrac{15}{\overline{AB}}\Rightarrow\overline{AB}=25$

$\Rightarrow\quad\overline{BD}=\sqrt{25^2-15^2}=20$

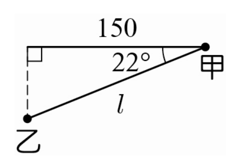
所以 $\overline{BC}=\overline{BD}+\overline{DC}=20+8=28$

2、地面上有甲、乙兩大樓，已知甲的高度大於乙，且甲、乙兩大樓的水平距離爲 150 公尺。某人從甲樓頂拉一條繩索到乙樓頂，並從甲樓頂測得乙樓頂的俯角爲 22°。假設該繩索被拉成直線，試問繩索的長度（單位：公尺）最接近下列哪個選項？（註：眼睛往下看目標物時，視線與水平線間的夾角稱爲俯角）

(1) 150　(2) $150\sin 22^\circ$　(3) $150\cos 22^\circ$　(4) $\dfrac{150}{\cos 22^\circ}$　(5) $\dfrac{150}{\sin 22^\circ}$

【112.學測 B】

解：依題意繪圖如右

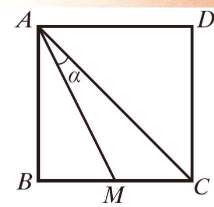


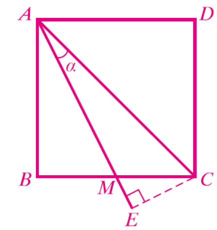
知 $\dfrac{150}{l}=\cos 22^\circ$

$\Rightarrow l=\dfrac{150}{\cos 22^\circ}$，故選(4)

3、如右圖所示，正方形 $ABCD$ 中，M 為 $\overline{BC}$ 中點，$\angle MAC=\alpha$，

則 $\tan\alpha=$ $\underline{\dfrac{1}{3}}$ 。





解：過 C 作 $\overline{CE}$ 垂直 $\overleftrightarrow{AM}$ 於 E 點，如右圖，且令此正方形的邊長為 a
由相似性質可知 $\triangle ABM\sim\triangle CEM$

$$\therefore \frac{\overline{CE}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{EM}}{\overline{BM}}=\frac{\overline{CM}}{\overline{AM}}\Rightarrow\frac{\overline{CE}}{a}=\frac{\overline{EM}}{\frac{1}{2}a}=\frac{\frac{1}{2}a}{\sqrt{a^2+(\frac{1}{2}a)^2}}=\frac{\frac{1}{2}a}{\frac{\sqrt{5}}{2}a}$$

可得 $\overline{CE}=\dfrac{a}{\sqrt{5}}$，$\overline{EM}=\dfrac{a}{2\sqrt{5}}$

故 $\triangle AEC$ 中（$\angle AEC=90°$）

$$\tan\alpha=\frac{\overline{CE}}{\overline{AE}}=\frac{\overline{CE}}{\overline{AM}+\overline{EM}}=\frac{\frac{a}{\sqrt{5}}}{\frac{\sqrt{5}a}{2}+\frac{a}{2\sqrt{5}}}=\frac{1}{3}$$

4、試求 $\sin^2 1°+\sin^2 2°+\sin^2 3°+\cdots+\sin^2 89°$ 的值為_______。

解：原式 $=(\sin^2 1°+\sin^2 89°)+(\sin^2 2°+\sin^2 88°)+\cdots+(\sin^2 44°+\sin^2 46°)+\sin^2 45°$

$$=(\sin^2 1°+\cos^2 1°)+(\sin^2 2°+\cos^2 2°)+\cdots+(\sin^2 44°+\cos^2 44°)+\sin^2 45°$$

$$=1\times 44+\frac{1}{2}=\frac{89}{2}.$$

5、設 θ 是銳角，已知 $\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta}=5$，則 $\tan\theta=$_________。

解：$\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta}=5\Rightarrow\dfrac{\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\cos\theta}}{\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\cos\theta}}=5$

$$\Rightarrow\frac{\tan\theta+1}{\tan\theta-1}=5\Rightarrow\tan\theta+1=5\tan\theta-5$$

$$\Rightarrow 4\tan\theta=6\quad\therefore\tan\theta=\frac{3}{2}$$

6、設 θ 為銳角，且 $\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{5}$，試求 $\sin^6\theta+\cos^6\theta=$___________。

解：$\because(\sin\theta-\cos\theta)^2=1-2\sin\theta\cos\theta$

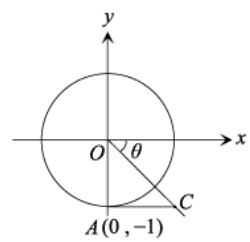
$\Rightarrow(\dfrac{1}{5})^2=1-2\sin\theta\cos\theta$ 得 $\sin\theta\cos\theta=\dfrac{12}{25}$

故 $\sin^6\theta+\cos^6\theta=1-3\sin^2\theta\cos^2\theta=1-3(\sin\theta\cos\theta)^2$

$$=1-3\times(\frac{12}{25})^2=\frac{193}{625}$$

主題2　廣義角三角函數磨練區：

1、如右圖，A 爲單位圓與 y 軸負向的交點，AC 直線垂直 y 軸與角 θ 邊 OC 交於點 C，則 $\overline{OC}=$



(1) $\sin\theta$　(2) $-\sin\theta$　(3) $\cos\theta$　(4) $-\cos\theta$　(5) $\dfrac{1}{\sin\theta}$。

解：令 $\overline{AC}=x$，則 C 點坐標爲 $(x,-1)$

$$\therefore \frac{-1}{r}=\sin(360^\circ-\theta)=-\sin\theta \Rightarrow r=\frac{1}{\sin\theta}>0$$

故 $\overline{AC}=\dfrac{1}{\sin\theta}$，選(5)

2、已知 $\sin\theta=-\dfrac{2}{3}$ 且 $\cos\theta>0$，請問下列哪些選項是正確的？

(1) $\tan\theta<0$　(2) $\tan^2\theta>\dfrac{4}{9}$　(3) $\sin^2\theta>\cos^2\theta$

(4) $\sin 2\theta>0$　(5)標準位置角 θ 與 2θ 的終邊位在不同的象限　【100學測】

(提示：$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$，$\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta$)

解：$\because \sin\theta=-\dfrac{2}{3}$ 且 $\cos\theta>0$，$\therefore \theta$ 在第四象限

故 $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，$\tan\theta=\dfrac{-2}{\sqrt{5}}=\dfrac{-2\sqrt{5}}{5}$

因此　$\sin^2\theta=\dfrac{4}{9}$，$\cos^2\theta=\dfrac{5}{9}$，$\tan^2\theta=\dfrac{4}{5}$　所以(1)(2)對，(3)錯

又　$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{4\sqrt{5}}{9}<0$，$\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta=\dfrac{1}{9}>0$

故　2θ 在第四象限

⇒標準位置角 θ 與 2θ 的終邊位在<u>**相同**</u>的象限，故選 (1)(2)

主題 3 三角函數角度的互化專練區：

1、若 $0° \le \theta \le 180°$，且 $\sin 2004° = \cos\theta$，求 $\theta=$____________。

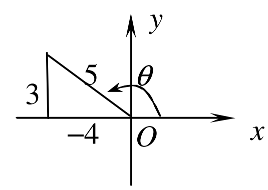
解：$\because \sin 2004° = \sin(1800° + 204°) = \sin 204°$

$$= \sin(90° + 114°) = \cos 114°$$

$\therefore\ \theta = 114°$.

2、設 $\cos\theta = -\dfrac{4}{5}$，且 $90° < \theta < 180°$，則 $\tan(-270° + \theta) =$________。

解：利用角度的互化

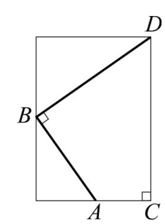


$$\tan(-270° + \theta) = \tan(-270° + \theta + 360°)$$

$$= \tan(90° + \theta) = \frac{\sin(90° + \theta)}{\cos(90° + \theta)}$$

$$= \frac{\cos\theta}{-\sin\theta} = \frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$$

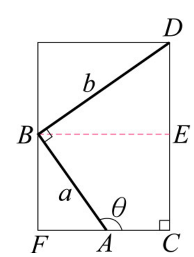
3、如右圖 $\angle BAC = \theta$，$\angle ABD = \angle ACD = 90^{\circ}$，$\overline{AB} = a$，$\overline{BD} = b$。



下列選項何者可以表示 $\overline{CD}$？

(1)$a\sin\theta + b\cos\theta$　(2)$a\sin\theta - b\cos\theta$　(3)$a\cos\theta - b\sin\theta$
(4)$a\cos\theta + b\sin\theta$　(5)$a\sin\theta + b\tan\theta$

解：作 $\overline{BE} \perp \overline{CD}$ 於 E，則 $\overline{CD} = \overline{CE} + \overline{DE}$，



令 $\angle BAC = \theta$，則 $\angle BAF = 180^{\circ} - \theta = \angle BDE$

而 $\overline{CE} = \overline{BF} = a\sin(180° - \theta) = a\sin\theta$

$$\overline{DE} = b\cos(180° - \theta) = b(-\cos\theta) = -b\cos\theta$$

$\therefore\ \overline{CD} = \overline{CE} + \overline{DE} = a\sin\theta - b\cos\theta$，選(2)

4、$\cos1°+\cos2°+\cos3°+\cdots\cdots+\cos179°+\cos180°=$ ____________。

解：$\because \cos(180°-\theta)=-\cos\theta$

$\therefore \cos179°=-\cos1°$，$\cos178°=-\cos2°$，$\cdots\cdots$，$\cos91°=-\cos89°$

故所求

$=\cos1°+\cos2°+\cdots\cdots+\cos89°+\cos90°+(-\cos89°)+(-\cos88°)+\cdots\cdots+(-\cos1°)+\cos180°$

$=\cos90°+\cos180°=0+(-1)=-1$

5、若θ爲廣義角，則下列敘述哪些正確？

(1)$120°$與$780°$爲同界角　(2)$310°$與$-790°$爲同界角　(3)$\cos(180°-\theta)=\cos(-\theta)$

(4)若$\sin\alpha=\sin\beta$，則α，β互爲同界角　(5)若$\tan\theta<0$，則$\sin\theta\cos\theta<0$

解：(1)錯；$780°=360°\times2+60°$，$\therefore 120°$與$780°$不是同界角

(2)對；$-790°=(-360°)\times2+(-70°)$，$\therefore -70°$爲$-790°$的同界角

(3)錯；$\cos(180°-\theta)=-\cos\theta$，$\cos(-\theta)=\cos\theta$

(4)錯；$\sin(180°-\theta)=\sin\theta$，但$180°-\theta$，$\theta$不爲同界角

(5)對；$\tan\theta<0\Rightarrow\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}<0\Rightarrow\sin\theta\cos\theta<0$

選(2)(5)

主題 4　直角坐標 $P(x, y)$ 與極坐標 $P[r, \theta]$ 磨練區：

1、已知 A、B 兩點的極坐標分別爲 $A[2, 30°]$，$B[4, 150°]$，試求 $\overline{AB}$ 之長度。

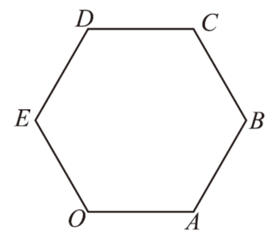
解：$A[2, 30°]$，$B[4, 150°]$的直角坐標分別爲

$A(2\cos 30°,\ 2\sin 30°) = (\sqrt{3}, 1)$

$B(4\cos 150°,\ 4\sin 150°) = (-2\sqrt{3}, 2)$

則 $\overline{AB} = \sqrt{(\sqrt{3}+2\sqrt{3})^2+(1-2)^2} = 2\sqrt{7}$

2、如右圖，$OABCDE$ 爲邊長 1 的正六邊形若以 O 爲原點，$\overrightarrow{OA}$ 爲直角坐標的 x 軸正向方，試以直角坐標表示點 A，B，C，D，E 的坐標。



解：$A(1, 0)$

$B(\sqrt{3}\cos 30°,\ \sqrt{3}\sin 30°) = (\frac{3}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2})$

$C(2\cos 60°,\ 2\sin 60°) = (1,\ \sqrt{3})$

$D(\sqrt{3}\cos 90°,\ \sqrt{3}\sin 90°) = (0,\ \sqrt{3})$

$E(1\times\cos 120°,\ 1\times\sin 120°) = (-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2})$

主題 5　面積公式與正弦定理習練區：

1、在ΔABC中，$\angle BAC$的平分線AD交對邊$\overline{BC}$於D；已知$\overline{BD}=3$，$\overline{DC}=6$，且$\overline{AB}=\overline{AD}$，則$\cos\angle BAD$之值爲________。（化成最簡分數）　【94.學測】

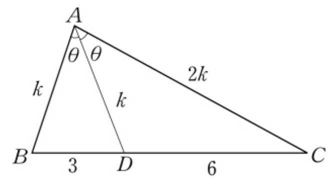
解：(1)$\because \overline{AD}$爲角平分線

$\therefore \overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{DC}=3:6=1:2$

(2)設$\overline{AB}=\overline{AD}=k$，則$\overline{AC}=2k$

又令$\angle BAD=\angle DAC=\theta$

利用　$\Delta ABD+\Delta ACD=\Delta ABC$，



則　$\dfrac{1}{2}\times k\times k\times\sin\theta+\dfrac{1}{2}\times k\times 2k\times\sin\theta=\dfrac{1}{2}\times k\times 2k\times\sin 2\theta$

又$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$

整理得　$4\cos\theta=3$，$\therefore \cos\theta=\dfrac{3}{4}$

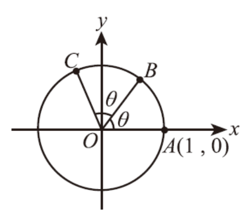
2、坐標平面上，以原點O爲圓心的圓上有三個相異點$A(1,0)$、B、C且$\overline{AB}=\overline{BC}$，已知銳角三角形$OAB$的面積爲$\dfrac{3}{10}$，則△$OAC$的面積爲________。

(提示：$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$)　　（化爲最簡分數）【97 學測】

解：$\because \overline{AB}=\overline{BC}$　$\therefore \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}$

$\Rightarrow$設$\angle AOB=\angle BOC=\theta$

又$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=1$



$\triangle OAB=\dfrac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{OB}\times\sin\theta$

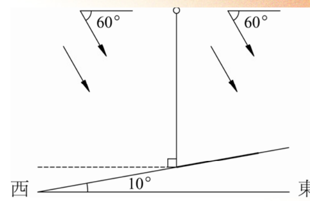
$\Rightarrow \dfrac{3}{10}=\dfrac{1}{2}\times1\times1\times\sin\theta\Rightarrow \sin\theta=\dfrac{3}{5}$　$\therefore \cos\theta=\dfrac{4}{5}$

則$\triangle OAC=\dfrac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{OC}\times\sin 2\theta$

$=\dfrac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{OC}\times(2\sin\theta\cos\theta)$

$=\dfrac{1}{2}\times1\times1\times(2\times\dfrac{3}{5}\times\dfrac{4}{5})=\dfrac{12}{25}$

3、在與水平面成10°的東西向山坡上，鉛直（即與水平面垂直）立起一根旗竿。當陽光從正西方以俯角60°平行投射在山坡上時，旗竿的影子長爲 11 公尺，如右圖所示（其中箭頭表示陽光投射的方向，而粗黑線段表示旗竿的影子）。試問旗竿的長度最接近以下哪一選項？



(1) 19.1 公尺　(2) 19.8 公尺　(3) 20.7 公尺　(4) 21.1 公尺　(5) 21.7 公尺

(參考數值：$\sin 10^\circ \approx 0.174$，$\sin 20^\circ \approx 0.342$，$\cos 10^\circ \approx 0.985$，

$\cos 20^\circ \approx 0.940$，$\sqrt{3} \approx 1.732$)　【97.指考甲】

解：如右圖 $\angle ABC = 90^\circ - 10^\circ = 80^\circ$

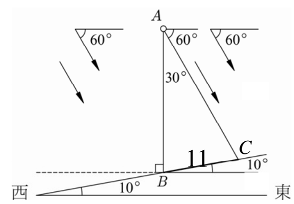
$\angle ACB = 180^\circ - 30^\circ - 80^\circ = 70^\circ$

設旗竿的長度爲x公尺

ΔABC中，由正弦定理知

$$\frac{11}{\sin 30^\circ} = \frac{x}{\sin 70^\circ} \Rightarrow \frac{1}{2}x = 11\sin 70^\circ$$

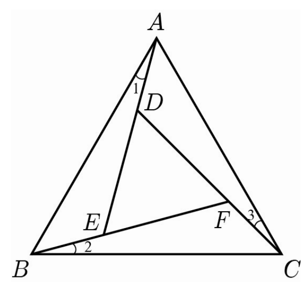
$\therefore x = 22 \times \cos 20^\circ \approx 22 \times 0.940 = 20.680 \doteqdot 20.7$，選(3)



4、如圖，正三角形ABC的邊長爲 1，並且$\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = 15^\circ$。

已知$\sin 15^\circ = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，　則正三角形$DEF$的邊長

爲_________。(化爲最簡根式)　【103.學測】



解：$\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = 15^\circ \Rightarrow \angle ABE = 45^\circ$,

$\angle AEB = 180^\circ - 45^\circ - 15^\circ = 120^\circ$

利用正弦定理得$\dfrac{\overline{AB}}{\sin 120^\circ} = \dfrac{\overline{AE}}{\sin 45^\circ} = \dfrac{\overline{BE}}{\sin 15^\circ}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\overline{AE}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\overline{BE}}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$$

$$\Rightarrow \overline{AE} = \frac{\sqrt{6}}{3},\quad \overline{BE} = \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{6}$$

又　$\overline{AD} = \overline{BE} = \dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{6}$

$\therefore$正三角形DEF的邊長

$$\overline{DE} = \overline{AE} - \overline{AD} = \frac{\sqrt{6}}{3} - \frac{(3\sqrt{2}-\sqrt{6})}{6} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$$

主題 6　餘弦定理及其應用實練區：

1、設a，b，c分別為$\triangle ABC$中，$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$的對邊長，若$(b+c+a)(b+c-a)=bc$，則$\angle A=$______。

解：$(b+c+a)(b+c-a)=bc$

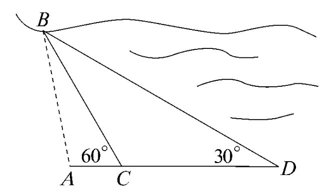
$\Rightarrow (b+c)^2-a^2=bc$

$\Rightarrow b^2+c^2-a^2=-bc$

$\therefore \cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{-bc}{2bc}=-\dfrac{1}{2}$

故$\angle A=120°$

2、如右圖，A、B 兩點分別位於一河口的兩岸邊。某人在通往 A 點的筆直公路上，距離 A 點 50 公尺的 C 點與距離 A 點 200 公尺的 D 點，分別測得$\angle ACB=60°$，$\angle ADB=30°$，則 A 與 B 的距離為__________公尺。



解：$\angle ACB=60°$ 且 $\angle CDB=30° \Rightarrow \angle CBD=30°$

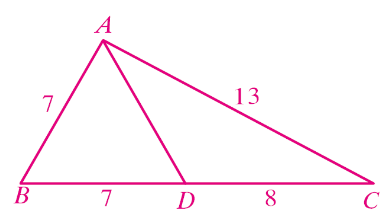
故 $\overline{BC}=\overline{CD}=150$

ΔABC 中，$\overline{AB}^2=150^2+50^2-2\times150\times50\times\cos 60°=17500$

$\therefore \overline{AB}=\sqrt{17500}=50\sqrt{7}$

3、在$\triangle ABC$ 中，若 D 點在$\overline{BC}$邊上，且 $\overline{AB}=7$, $\overline{AC}=13$, $\overline{BD}=7$, $\overline{CD}=8$，試求$\overline{AD}$的長。

解：ΔABC 中，$\cos B=\dfrac{7^2+15^2-13^2}{2\times7\times15}=\dfrac{1}{2}$



ΔABD 中，$\cos B=\dfrac{7^2+7^2-\overline{AD}^2}{2\times7\times7}=\dfrac{1}{2}$

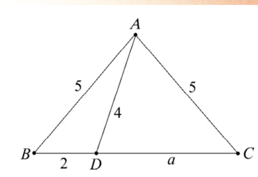
$\therefore 98-\overline{AD}^2=49 \Rightarrow \overline{AD}^2=49$

$\Rightarrow \overline{AD}=\pm7$（負不合）

故 $\overline{AD}=7$

4、如右圖的$\triangle ABC$中，D為邊$\overline{BC}$上一點，且$\overline{AB}=\overline{AC}=5,\overline{AD}=4,$

$\overline{BD}=2,\ \overline{DC}=a$，則$a=$ $\underline{\dfrac{9}{2}}$ 。　　【92指考乙】



解：如圖，$\angle ADB=\theta,\ \angle ADC=180°-\theta,$

$\triangle ABD$中

$5^2=4^2+2^2-2\times4\times2\cos\theta\Rightarrow\cos\theta=\dfrac{4^2+2^2-5^2}{2\times4\times2}=-\dfrac{5}{16}$

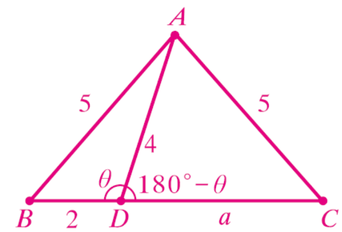
$\triangle ACD$中

$5^2=4^2+a^2-2\times4\times a\cos(180°-\theta)\Rightarrow\cos(180°-\theta)=\dfrac{4^2+a^2-5^2}{2\times4\times a}$

又$\cos(180°-\theta)=-\cos\theta\Rightarrow\dfrac{4^2+a^2-5^2}{2\times4\times a}=\dfrac{5}{16}$

整理得 $2a^2-5a-18=0\Rightarrow(2a-9)(a+2)=0$

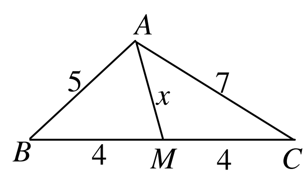
$\therefore a=\dfrac{9}{2}$或$a=-2$（不合）



5、在三角形ABC中，若M為$\overline{BC}$中點，且$\overline{AB}=5$，$\overline{AC}=7$，$\overline{BC}=8$，則$\overline{AM}=$______。

(中線定理)

解：如右圖，設$\overline{AM}=x$



由中線定理 $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$

即 $5^2+7^2=2(x^2+4^2)\ \Rightarrow\ x^2=21$

$\Rightarrow\ x=\sqrt{21}$，$\therefore\ \overline{AM}=\sqrt{21}$

6、四邊形$ABCD$中，$\overline{AB}=1,\overline{BC}=5,\overline{CD}=5,\overline{DA}=7$，且$\angle DAB=\angle BCD=90°$，

則對角線$\overline{AC}$長為____________。　　【100學測】

解：四邊形$ABCD$中，$\because\angle DAB=\angle BCD=90°$，

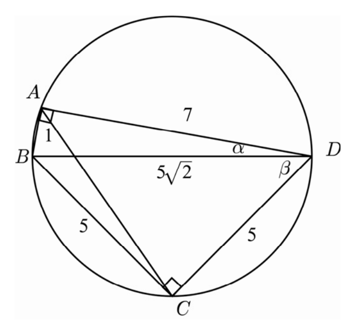
$\therefore$四邊形$ABCD$為圓內接四邊形。

如右圖，利用餘弦定理

四邊形$ABCD$中，$\angle ABC+\angle ADC=180°$

$\Rightarrow\cos(\angle ABC)=-\cos(\angle ADC)$

即$\dfrac{1^2+5^2-\overline{AC}^2}{2\times1\times5}=-\dfrac{7^2+5^2-\overline{AC}^2}{2\times7\times5}\Rightarrow\overline{AC}=\sqrt{32}$



7、$\triangle ABC$ 中，已知 $\overline{AB}=\overline{BC}=3$， $\cos\angle ABC=-\dfrac{1}{8}$。在 $\triangle ABC$ 的外接圓上有一點 D 滿足 $\overline{BD}=4$，且 $\overline{AD}\le\overline{CD}$，則 $\overline{CD}=$________。(化為最簡根式)　　【114.學測 A】

解：如右圖 $\angle ABC+\angle ADC=180^\circ$ (圓內接四邊形對角互補)

即 $\angle ADC=180^\circ-\angle ABC$

$\cos\angle ADC=\cos(180^\circ-\angle ABC)=-\cos\angle ABC=\dfrac{1}{8}$

又 $\overline{AB}=\overline{BC}$ $\therefore \angle ADB=\angle ACB=\theta$

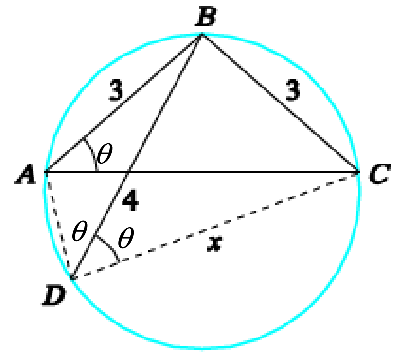
得 $\cos 2\theta=\dfrac{1}{8}\Rightarrow\cos\theta=\sqrt{\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}}=\dfrac{3}{4}$

$\triangle BCD$ 中，

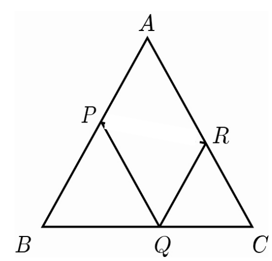
由餘弦定理知 $3^2=x^2+4^2-2\times4\times x\times\dfrac{3}{4}$

即 $x^2-6x+7=0 \Rightarrow x=\dfrac{6\pm\sqrt{8}}{2}=3\pm\sqrt{2}$

故 $\overline{CD}=3+\sqrt{2}$ ($\overline{CD}>\overline{AD}$)



8、在邊長為 13 的正三角形 ABC 上各邊分別取一點 P,Q,R，使得 $APQR$ 形成一平行四邊形，如右圖所示：若平行四邊形 $APQR$ 的面積為 $20\sqrt{3}$，則線段 PR 的長度為________。　　【101.學測】



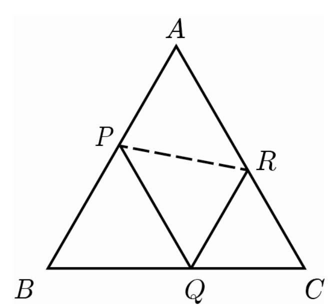
解：$\because APQR$ 為一平行四邊形，

$\therefore \overline{AR}=\overline{PQ}=\overline{PB}$ 且 $\overline{AP}=\overline{RQ}=\overline{RC}$

假設 $\overline{AP}=x, \overline{PB}=\overline{AR}=13-x$

$\triangle APR$ 的面積 $=\dfrac{1}{2}$ 平行四邊形 $APQR$ 的面積 $=10\sqrt{3}$

$\dfrac{1}{2}\overline{AP}\times\overline{AR}\times\sin A=\dfrac{1}{2}x(13-x)\times\sin 60^\circ=10\sqrt{3}\Rightarrow x(13-x)=40$



故 $\overline{PR}^2=x^2+(13-x)^2-2x(13-x)\cos 60^\circ$

$=x^2+x^2-26x+169-x(13-x)$

$=-2x(13-x)+169-x(13-x)$

$=-3x(13-x)+169=-3\times40+169=49$

$\therefore \overline{PR}=7$

9、在ΔABC中，若$\overline{AB}=3$，$\overline{BC}=5$，$\overline{CA}=7$，則下列敘述哪些正確？

(1) ΔABC的面積為15平方單位　　(2) ΔABC的最大內角為$120°$

(2) ΔABC外接圓的半徑為$\dfrac{7\sqrt{3}}{3}$　　(4) ΔABC內切圓的半徑為$\sqrt{3}$

(5) ΔABC中，若$\overline{BD}$為$\angle ABC$的分角線，則$\overline{BD}=\dfrac{15}{8}\sqrt{3}$

解：(1) $s=\dfrac{3+5+7}{2}=\dfrac{15}{2}$，$\Delta ABC$的面積$=\sqrt{\dfrac{15}{2}(\dfrac{15}{2}-3)(\dfrac{15}{2}-5)(\dfrac{15}{2}-7)}=\dfrac{15\sqrt{3}}{4}$

(2)$\because$大邊對大角 $\therefore \cos\angle ABC=\dfrac{3^2+5^2-7^2}{2\times3\times5}=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow\angle ABC=120°$

(3)由ΔABC面積$=\dfrac{abc}{4R}\Rightarrow\dfrac{15\sqrt{3}}{4}=\dfrac{3\times5\times7}{4R}\Rightarrow R=\dfrac{7\sqrt{3}}{3}$

(4)由ΔABC面積$=\dfrac{1}{2}(a+b+c)\times r\Rightarrow\dfrac{15\sqrt{3}}{4}=\dfrac{1}{2}(3+5+7)r\Rightarrow r=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(5)由ΔABC面積$=\Delta ABD$面積$+\Delta BDC$面積，且$\angle ABD=\angle BDC=60°$

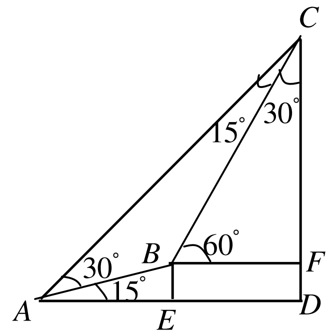
得 $\dfrac{1}{2}\times3\times\overline{AD}\times\sin60^{\circ}+\dfrac{1}{2}\times5\times\overline{AD}\times\sin60^{\circ}=\dfrac{1}{2}\times3\times5\times\sin120^{\circ}$

$\Rightarrow 8\times\overline{AD}=15\Rightarrow\overline{AD}=\dfrac{15}{8}$

故選(2)(3)

主題 7　三角測量要練習：

1、某人於山底測得山頂之仰角爲45°，由此處上山，循15°斜坡上行100公尺，再測得山頂之仰角爲60°，則山高＿＿＿＿＿公尺。



解：設山高 $\overline{CD}=h$，則 $\overline{AC}=\sqrt{2}h$

ΔABC 中，$\angle ACB=45°-30°=15°$，

又 $\angle CAB=30°$

$\Rightarrow \angle ABC=180°-30°-15°=135°$

利用正弦定理知

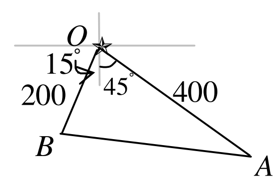
$$\frac{\overline{AC}}{\sin135°}=\frac{100}{\sin15°}$$

$$\overline{AC}=\frac{100}{\sin15°}\times\sin135°=\frac{100}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{100(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{\sqrt{2}}$$

即 $\sqrt{2}h=\dfrac{100(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{\sqrt{2}}\quad\Rightarrow\quad h=50(\sqrt{6}+\sqrt{2})$

故山高 $50(\sqrt{6}+\sqrt{2})$ 公尺

2、氣象局測出在 20 小時期間，颱風中心的位置由恆春東南方 400 公里直線移動到恆春南 15°西的 200 公里處，試求颱風移動的平均速度。(整數以下，四捨五入)
答：＿＿＿＿＿公里／時。　　　【89.學測】



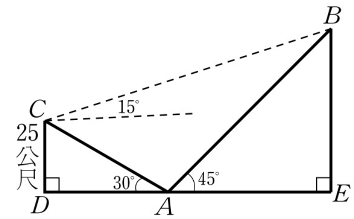
解：依題意繪製如右圖
利用餘弦定理

$$\overline{AB}^2=400^2+200^2-2\times400\times200\times\cos60°=120000$$

$$\Rightarrow \overline{AB}=200\sqrt{3}，\ 200\sqrt{3}\div20=10\sqrt{3}\doteqdot17\ (公里/時)$$

3、有甲、乙兩棟大樓，已知甲大樓的高度爲 25 公尺，今在此兩棟大樓之間找一點 A，分別測得甲、乙大樓的仰角爲 30°及 45°，又在甲大樓的樓頂測得乙大樓的仰角爲 15°，求乙大樓的高度爲多少公尺？

解：設甲大樓高度 $\overline{CD}=25$ 公尺，乙大樓高度爲 $\overline{BE}$



$\triangle ACD$ 中 $\overline{AC}=2\overline{CD}=2\times 25=50$

$\angle BAE=45^\circ$

$\angle BAC=180^\circ-30^\circ-45^\circ=105^\circ$

$\therefore \angle CBA=180^\circ-45^\circ-105^\circ=30^\circ$

由正弦定理得

$$\frac{50}{\sin 30^\circ}=\frac{\overline{AB}}{\sin 45^\circ}\Rightarrow \overline{AB}=\frac{50}{\sin 30^\circ}\times\sin 45^\circ=50\sqrt{2}$$

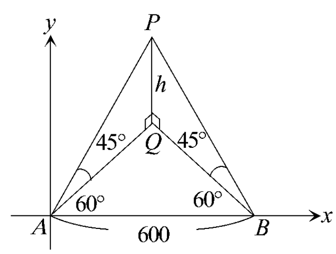
又$\triangle ABE$ 爲 $45^\circ-45^\circ-90^\circ$ 的三角形

$$\therefore \overline{BE}=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\overline{AB}=\frac{1}{\sqrt{2}}\times 50\sqrt{2}=50\ (\text{公尺})$$

4、某人隔河測一山高，在 A 點觀測山時，山的方位爲東偏北 60°，山頂的仰角爲 45°，某人自 A 點向東行 600 公尺到達 B 點，山的方位變成在西偏北 60°，則山有多高？

【91.學測】

解：令山高 $\overline{PQ}=h$



ΔABQ 中

$\angle QAB=\angle QBA=60^\circ \quad\Rightarrow\quad \Delta QAB$ 爲正三角形

ΔPAQ 中

$\angle PAQ=45^\circ$，$\overline{PQ}\perp\overline{AQ} \quad\Rightarrow\quad \overline{PQ}=\overline{AQ}$

$\therefore \overline{PQ}=\overline{AQ}=\overline{AB}=600$，故山高 600 公尺

5、在地面上相距 2000 公尺之兩控制塔 A 與 B，同時測得一飛機 C 之仰角分別爲 30° 及 45°。若在同一時刻，從飛機上測得兩控制塔的視角（即 $\angle ACB$）爲 45°，則飛機當時的高度爲何?

解：設飛機高度 $\overline{CD}=h$ 公尺

ΔACD 中，$\overline{AC}=\overline{CD}\csc 30^\circ=2h$

ΔBCD 中，$\overline{BC}=\overline{CD}\csc 45^\circ=\sqrt{2}h$

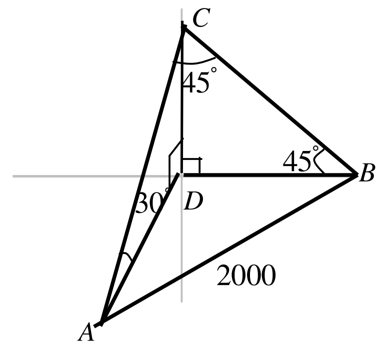
ΔABC 中，

$$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2-2\overline{BC}\times\overline{AC}\cos 45^\circ$$

$$\Rightarrow 2000^2=\left(\sqrt{2}h\right)^2+\left(2h\right)^2-2\times\sqrt{2}h\times 2h\times\frac{1}{\sqrt{2}}$$

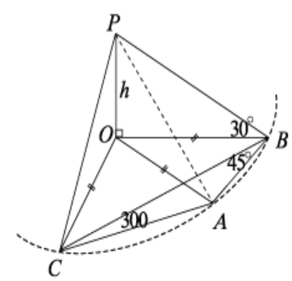
$$\Rightarrow 2h^2=2000^2\Rightarrow h=1000\sqrt{2}$$

$\therefore$飛機高度爲 $1000\sqrt{2}$（公尺）



6、從平地上 A、B、C 三點測得某大樓樓頂之仰角均爲 30°。若 $\angle ABC=45°$，而 $\overline{AC}=300$ 公尺，則此大樓的高度爲__________公尺。

解：依題意繪圖如右



$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$ 且 A，B，C 共圓

設 $\overline{OP}=h\Rightarrow\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=\sqrt{3}h$

在$\triangle ABC$ 中，

利用正弦定理 $\dfrac{\overline{AC}}{\sin 45°}=2R$，$R=\overline{OA}$

$\therefore 300=2(\sqrt{3}h)\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，解得 $h=50\sqrt{6}$

故大樓的高度爲 $50\sqrt{6}$ 公尺