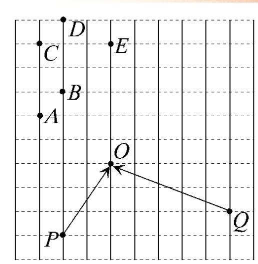
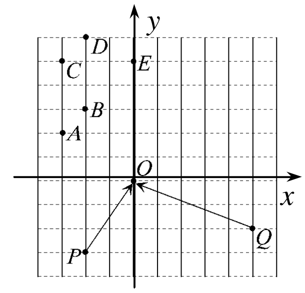
主題 2　平面向量的加、減法與係數積零練區：



1、如圖，下面哪一選項中的向量與另兩個向量 $\overrightarrow{PO}$ 、 $\overrightarrow{QO}$ 之和等於零向量？

(1) $\overrightarrow{AO}$　(2) $\overrightarrow{BO}$　(3) $\overrightarrow{CO}$　(4) $\overrightarrow{DO}$　(5) $\overrightarrow{EO}$　【91.學測】

解：如右圖，坐標化



得 $\overrightarrow{PO}=(2,3)$ ， $\overrightarrow{QO}=(-5,2)$

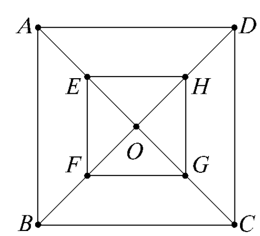
$\Rightarrow \overrightarrow{PO}+\overrightarrow{QO}=(-3,5)$

又 $\overrightarrow{AO}=(3,-2)$ ， $\overrightarrow{BO}=(2,-3)$ ， $\overrightarrow{CO}=(3,-5)$ ，

$\overrightarrow{DO}=(2,-6)$ ， $\overrightarrow{EO}=(0,-5)$

故 $\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{QO}+\overrightarrow{CO}=(0,0)$ ，選(3)

2、如右圖所示，O 為正方形 $ABCD$ 對角線的交點，且 E，F，G，H 分別為線段 $\overline{OA}$，$\overline{OB}$，$\overline{OC}$，$\overline{OD}$ 的中點，試問下列何者為真？



(1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{GC}$　(2) $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{EF}$

(3) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DB}$

(4) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{GC}$　(5) $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BF}=0$　【86.日社】

解：(1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ ， $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{AC}$　$\therefore$(1)正確

(2) $\overline{AB}=2\overline{EF}$ 且 $\overline{AB}\,//\,\overline{EF}$　$\therefore \overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{EF}$　$\therefore$(2)正確

(3) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$　$\therefore$(3)正確

(4) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{GC}$　$\therefore$(4)正確

(5) $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BF}=(\frac{1}{2}\overrightarrow{AO})\cdot(\frac{1}{2}\overrightarrow{BO})=0$　($\because \overrightarrow{AO}\perp\overrightarrow{BO}$)　$\therefore$(5)正確

故選(1)(2)(3)(4)(5)

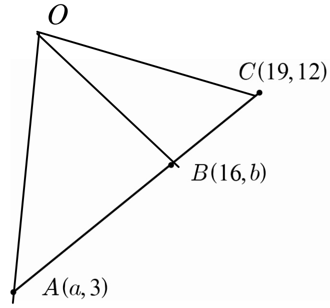
別怕慢，就怕你一直在滑手機。

Don’t worry if you’re slow — turtles still beat the ones who never start.

主題 3　線性組合、分點公式、共線性質等練習：

1、坐標平面中 $A(a,3), B(16,b), C(19,12)$ 三點共線。已知 C 不在 A, B 之間，且 $\overline{AC}:\overline{BC}=3:1$，

則 $a+b=$________。【102.學測】



解：$\because \overline{AC}:\overline{BC}=3:1$ 且 C 不在 A, B 之間，如圖

$\therefore \overline{AB}:\overline{BC}=2:1$

由分點公式知 $\overrightarrow{OB}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OC}$

即 $(16,b)=(\dfrac{a+2\times19}{3},\dfrac{3+2\times12}{3})$

$\Rightarrow a=10, b=9$，故 $a+b=19$

2、設 A、B、C 三點不共線，x、y 為實數，若 $x\overrightarrow{AB}+(y+3)\overrightarrow{BC}+(x-y+3)\overrightarrow{CA}=\vec{0}$，求 x、y 之值。

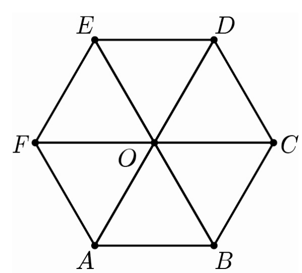
解：$x\overrightarrow{AB}+(y+3)\overrightarrow{BC}+(x-y+3)\overrightarrow{CA}=\vec{0}$

$\Rightarrow x\overrightarrow{AB}+(y+3)(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})+(x-y+3)(-\overrightarrow{AC})=\vec{0}$

整理得 $(x-y-3)\overrightarrow{AB}+(-x+2y)\overrightarrow{AC}=0$

則 $\begin{cases} x-y-3=0 \\ -x+2y=0 \end{cases}$，解得 $x=6$，$y=3$

3、如圖所示，O 為正六邊形之中心。試問下列哪個向量的終點 P 落在 $\triangle ODE$ 內部（不含邊界）？



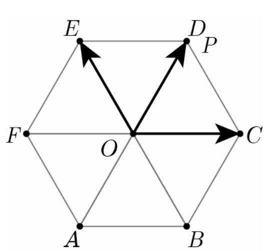
(1) $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OE}$　　(2) $\overrightarrow{OP}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{OC}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OE}$

(3) $\overrightarrow{OP}=-\dfrac{1}{4}\overrightarrow{OC}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OE}$　　(4) $\overrightarrow{OP}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{OC}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OE}$

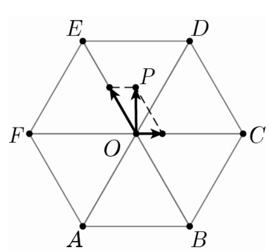
(5) $\overrightarrow{OP}=-\dfrac{1}{4}\overrightarrow{OC}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OE}$　　【109.學測】

解：線性組合，繪圖如下

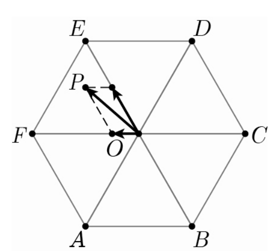
(1)

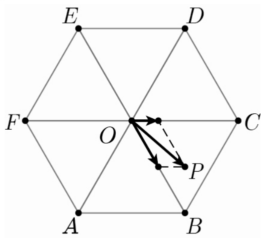


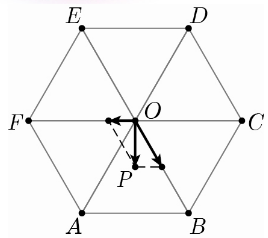
(2)



(3)



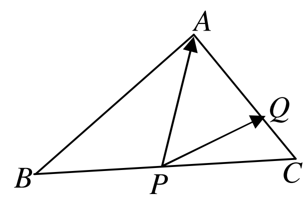
(4) 

(5) 

故選(2)

4、在坐標平面上的$\triangle ABC$中，P為$\overline{BC}$邊之中點，Q在$\overline{AC}$邊上且$\overline{AQ}=2\overline{QC}$。

已知$\overrightarrow{PA}=(4,3)$，$\overrightarrow{PQ}=(1,5)$，則$\overrightarrow{BC}=$__________。　【96.學測】



解：$\overline{AQ}=2\overline{QC}\Rightarrow\overline{AQ}:\overline{CQ}=2:1$

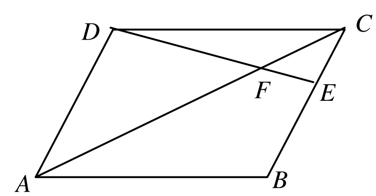
由分點公式知$\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{PA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{PC}$

$\Rightarrow\ 2\overrightarrow{PC}=3\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{PA}=(3,15)-(4,3)=(-1,12)$

$\therefore\ \overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{PC}=(-1,12)$

5、如右圖，在平行四邊形$ABCD$中，$\overline{BE}=2\overline{EC}$，且已知

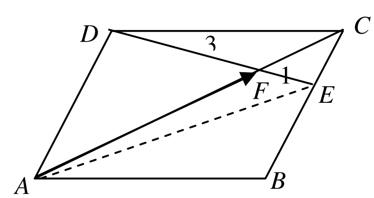
$\overrightarrow{AF}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}$，則數對$(x,y)=$__________。



解：$\because\ \overline{AD}=\overline{BC}$，$\overline{BE}=2\overline{EC}$　$\therefore\ \overline{AD}=3\overline{EC}$

由$\triangle AFD\sim\triangle CFE$　知　$\overline{DF}:\overline{EF}=\overline{AD}:\overline{EC}=3:1$

連接$\overline{AE}$，在$\triangle ADE$中，利用分點公式得



$$\overrightarrow{AF}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AE}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}=\frac{3}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE})+\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$$

$$=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{BE}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}(\frac{2}{3}\overrightarrow{AD})+\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$$

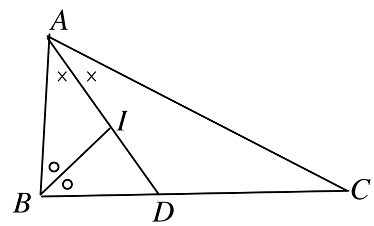
$$=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$$

故數對$(x,y)=(\frac{3}{4},\frac{3}{4})$

6、ΔABC 中，$\overline{AB}=4$，$\overline{BC}=6$，$\overline{CA}=7$，I 爲 ΔABC 的內心（三個內角平分線的交點），

如果 $\overrightarrow{AI}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$，則實數對 $(m,n)=$____________。

解：$\because$ $\overline{AD}$ 爲 $\angle BAC$ 的平分線



$\therefore$ $\overline{BD}:\overline{CD}=\overline{AB}:\overline{AC}=4:7$

故 $\overrightarrow{AD}=\frac{7}{11}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{11}\overrightarrow{AC}$

$\overline{BD}=\frac{4}{11}\times 6=\frac{24}{11}$

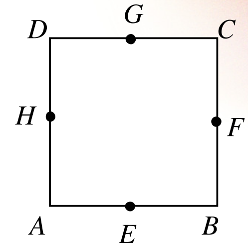
又 $\overline{BI}$ 爲 $\angle ABC$ 的平分線

$\therefore$ $\overline{DI}:\overline{IA}=\overline{BD}:\overline{AB}=\frac{24}{11}:4=6:11$

故 $\overrightarrow{AI}=\frac{11}{17}\overrightarrow{AD}=\frac{11}{17}(\frac{7}{11}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{11}\overrightarrow{AC})=\frac{7}{17}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{17}\overrightarrow{AC}$

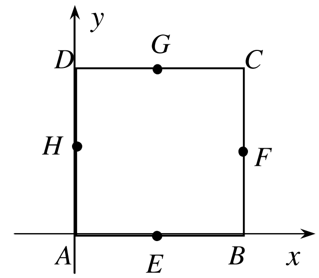
主題 4　向量的內積實練區：

1、如右圖，正方形 $ABCD$ 各邊中點依次為 E、F、G、H，則下列何者與 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}$ 相等



(1) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AF}$　(2) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AF}$　(3) $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AB}$

(4) $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AC}$　(5) $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}$



解：如右圖，坐標化，令 $A(0,0)$、$B(2,0)$、$C(2,2)$、$D(0,2)$、$E(1,0)$、$F(2,1)$、$G(1,2)$、$H(0,1)$，則

$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=(1,0)(2,1)=2+0=2$

(1) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AF}=(2,2)\cdot(2,1)=4+2=6$

(2) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AF}=(0,2)\cdot(2,1)=0+2=2$

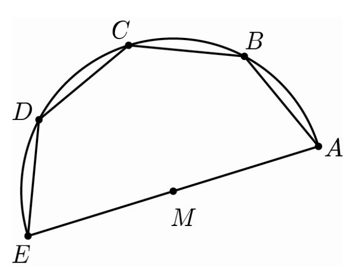
(3) $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AB}=(1,2)\cdot(2,0)=2+0=2$

(4) $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AC}=(1,0)\cdot(2,2)=2+0=2$

(5) $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}=(0,1)\cdot(2,2)=0+2=2$

選(2)(3)(4)(5)

2、如圖，以 M 為圓心、$\overline{MA}=8$ 為半徑畫圓，$\overline{AE}$ 為該圓的直徑，B、C、D 三點皆在圓上，且 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DE}$。若 $\overrightarrow{MD}=8(\cos(\theta+90°),\sin(\theta+90°))$。請選出正確的選項。

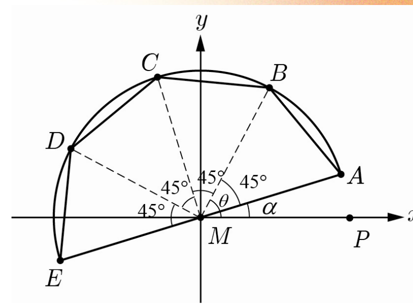


(1) $\overrightarrow{MA}=8(\cos\theta,\sin\theta)$　(2) $\overrightarrow{MC}=8(\cos(\theta+45°),\sin(\theta+45°))$

(3) （內積）$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MA}=8$　(4) （內積）$\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MD}=0$

(5) $\overrightarrow{BD}=8(\cos\theta+\cos(\theta+90°),\sin\theta+\sin(\theta+90°))$　【104.學測】

解：坐標化如圖



設 $\angle PMA=\alpha$，$\because \overline{AE}$ 爲直徑，且 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DE}$

$\therefore \angle AMB=\angle MBC=\angle CMD=\angle DME=45°$

又 $\overrightarrow{MD}=8(\cos(\theta+90°),\sin(\theta+90°))\Rightarrow \theta=\alpha+45°$

(1)錯；$\overrightarrow{MA}=8(\cos\alpha,\sin\alpha)$

(2)對；$\overrightarrow{MC}=8(\cos(\angle PMC),\sin(\angle PMC))$

$=8(\cos(\theta+45°),\sin(\theta+45°))$

(3)錯；$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MA}=|\overrightarrow{MA}|^2=8^2=64$

(4)對；$\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MD}=|\overrightarrow{MB}||\overrightarrow{MD}|\cos 90°=8\times 8\times 0=0$

(5)錯；$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MB}$

$=8(\cos(\theta+90°),\sin(\theta+90°))-8(\cos\theta,\sin\theta)$

$=8(\cos(\theta+90°)-\cos\theta,\sin(\theta+90°)-\sin\theta)$

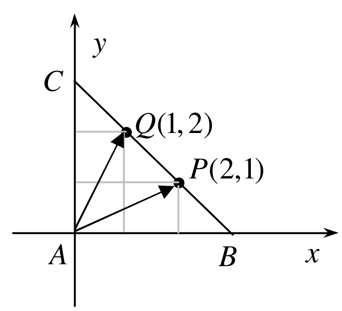
故選(2)(4)

3、設△ABC 爲一等腰直角三角形，$\angle BAC=90°$。若 P，Q 爲斜邊 $\overline{BC}$ 的三等分，

則 $\tan\angle PAQ=$__________。（化成最簡分數）【93.學測】

解：如右圖，坐標化令 $A(0,0)$ ，$B(3,0)$ ，$C(0,3)$

則得 $P(2,1)$ ，$Q(1,2)$



故 $\overrightarrow{AP}=(2,1)$ ，$\overrightarrow{AQ}=(1,2)$

$$\cos\angle PAQ=\frac{\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}}{|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{AQ}|}=\frac{2\times1+1\times2}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{4}{5}$$

$$\therefore \tan\angle PAQ=\frac{3}{4}$$

4、四邊形 $ABCD$ 中，$\angle A=120^0$ ，$\overline{AB}=1$ ，$\overline{AD}=2$ 且 $\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}$ ，

則 $\overrightarrow{AC}$ 的長度爲__________。

解：因爲 $\left|\overrightarrow{AC}\right|^2=\left|3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}\right|^2=9\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+4\left|\overrightarrow{AD}\right|^2+(2\times3\times2)\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$

$=9\times1^2+4\times2^2+12\times1\times2\times\cos120^0=13$

所以 $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{13}$

5、設 $\vec{u}$，$\vec{v}$ 爲兩非零向量，以 $\left|\vec{u}\right|$ 表 $\vec{u}$ 之長度。若 $\left|\vec{u}\right|=2\left|\vec{v}\right|=\left|2\vec{u}+3\vec{v}\right|$，且 θ 表 $\vec{u}$ 與 $\vec{v}$ 之夾角，則 $\cos\theta=$____________。(化成最簡分數)

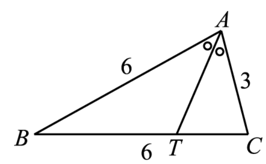
解：由 $\left|2\vec{u}+3\vec{v}\right|^2=\left(2\left|\vec{v}\right|\right)^2$

$\Rightarrow 4\left|\vec{u}\right|^2+12\vec{u}\cdot\vec{v}+9\left|\vec{v}\right|^2=4\left|\vec{v}\right|^2$，又 $\left|\vec{u}\right|^2=4\left|\vec{v}\right|^2$

$\therefore 4\times4\left|\vec{v}\right|^2+12\times2\left|\vec{v}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|\cos\theta+9\left|\vec{v}\right|^2=4\left|\vec{v}\right|^2$

即 $24\cos\theta=-21 \Rightarrow \cos\theta=\dfrac{-21}{24}=-\dfrac{7}{8}$

6、$\triangle ABC$ 中，已知 $\overline{BC}=6,\ \overline{AC}=3,\ \overline{AB}=6$，$\angle A$ 之分角線交 $\overline{BC}$ 於 T，求 $\overline{AT}$ 之長。



解：$\because \overline{AT}$ 平分 $\angle A$ $\quad\therefore \overline{BT}:\overline{CT}=6:3=2:1$

由分點公式得 $\overrightarrow{AT}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC})$

$\Rightarrow |\overrightarrow{AT}|^2=\dfrac{1}{9}(|\overrightarrow{AB}|^2+4\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+4|\overrightarrow{AC}|^2)$

又 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=6\cdot3\cdot\cos A=6\cdot3\cdot\dfrac{6^2+3^2-6^2}{2\cdot6\cdot3}=\dfrac{9}{2}$

$\therefore |\overrightarrow{AT}|^2=\dfrac{1}{9}(6^2+4\times\dfrac{9}{2}+4\times3^2)=10$

$\Rightarrow \overline{AT}=\sqrt{10}$

7、設 $\overrightarrow{OA}=(3,1)$，$\overrightarrow{OB}=(-1,2)$，若 $\overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{BC}\,//\,\overrightarrow{OA}$，且 $\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}$，則 $\overrightarrow{OD}=$？

解：設 $\overrightarrow{OC}=(x,y)$

$\because \overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{OB}$ $\quad\therefore \overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB}=0$

$\Rightarrow -x+2y=0 \cdots\cdots$ ①

又 $\overrightarrow{BC}\,//\,\overrightarrow{OA}\Rightarrow(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})\,//\,\overrightarrow{OA}$

$\Rightarrow \dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-2}{1}\Rightarrow x-3y=-7 \cdots\cdots$ ②

由① ②解得 $x=14$，$y=7$

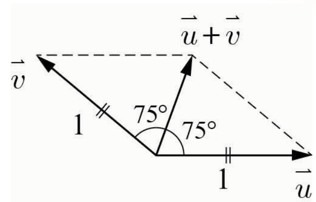
$\therefore \overrightarrow{OC}=(14,7)$

已知 $\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(14,7)-(3,1)=(11,6)$

8、設 $\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}$ 爲兩個長度皆爲 1 的向量。若 $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ 與 $\overrightarrow{u}$ 的夾角爲 $75°$，則 $\overrightarrow{u}$ 與 $\overrightarrow{v}$ 的內積爲__________。(化爲最簡根式)　　　【103.學測】

解：$\because |\overrightarrow{u}|=|\overrightarrow{v}|=1$，$\therefore \overrightarrow{u}$ 與 $\overrightarrow{v}$ 所張的平行四邊形爲菱形



$\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ 爲此菱形之對角線且爲 $\overrightarrow{u}$ 與 $\overrightarrow{v}$ 夾角的平分線

$\Rightarrow \overrightarrow{u}$ 與 $\overrightarrow{v}$ 的夾角 $=75^\circ\times 2=150^\circ$

$\Rightarrow \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=|\overrightarrow{u}|\times|\overrightarrow{v}|\times\cos 150^\circ=1\times 1\times(\dfrac{-\sqrt{3}}{2})=\dfrac{-\sqrt{3}}{2}$

主題 5 直線的參數式與二直線的交角零練習：

1、平面上四點 $A(-1,2)$，$B(4,2)$，$C(2,-1)$ 和 $O(0,0)$。過 B 點作直線 OC 的平行線交直線 OA 於 D 點，則 D 點的坐標為__________。

解：過 B 點作直線 OC 的平行線 $L:\begin{cases}x=4+2t\\y=2-t\end{cases}, t\in R$

$\overleftrightarrow{OA}:\begin{cases}x=-s\\y=2s\end{cases}, s\in R$

則 $\begin{cases}4+2t=-s\\2-t=2s\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2t+s=-4\\t+2s=2\end{cases}$

解得 $s=\dfrac{8}{3}$，$t=-\dfrac{10}{3}$，故 D 點的坐標為 $(-\dfrac{8}{3},\dfrac{16}{3})$

2、若一直線過點 $(1,3)$ 且與直線 $y=2x+6$ 所夾的角為 45°，試求其方程式。

解：設所求直線為 $y-3=m(x-1)$

即 $mx-y-m+3=0$，法向量 $\overrightarrow{n_1}=(m,-1)$

又直線 $y=2x+6$ 其法向量 $\overrightarrow{n_2}=(2,-1)$

故 $\cos 45^\circ=\dfrac{m\times 2+(-1)\times(-1)}{\sqrt{m^2+(-1)^2}\times\sqrt{2^2+(-1)^2}}$

$\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{2m+1}{\sqrt{5(m^2+1)}}$，平方整理得

$3m^2+8m-3=0 \Rightarrow (m+3)(3m-1)=0$

$\Rightarrow m=-3$ 或 $m=\dfrac{1}{3}$

所求為 $3x+y-6=0$ 或 $x-3y+8=0$

3、坐標平面上，直線 L_1 與 L_2 的方程式分別為 $x+2y=0$ 與 $3x-5y=0$。為了確定平面上某一定點 P 的坐標，從 L_1 上的一點 Q_1 偵測得向量 $\overrightarrow{Q_1P}=(-7,9)$，再從 L_2 上的點 Q_2 偵測得向量 $\overrightarrow{Q_2P}=(-6,-8)$，則 P 點的坐標為___________。【104.學測】

解：設 $P(x,y), Q_1(2t,-t)\in L_1, Q_2(5s,3s)\in L_2$

$\because \overrightarrow{Q_1Q_2}=\overrightarrow{Q_1P}-\overrightarrow{Q_2P}$，$\therefore (5s-2t,3s+t)=(-7,9)-(-6,-8)=(-1,17)$

$\Rightarrow \begin{cases}5s-2t=-1\\3s+t=17\end{cases} \therefore s=3, t=8$

由 $\overrightarrow{Q_1P}=(x-2t,y+t)=(-7,9)$

$\Rightarrow (x-16,y+8)=(-7,9)$

$\therefore x=9, y=1$，即 $P(9,1)$

主題 6　正射影與正射影長實練區：

1、設 $\overrightarrow{u}=(5,5)$ 且直線 L: $3x-y+2=0$，則 $\overrightarrow{u}$ 在 L 上的正射影為________。
（以坐標表示法）(提示：直線 L: $3x-y+2=0$ 方向向量 $\overrightarrow{V_L}=(1,3)$)

解：直線 L: $3x-y+2=0$ 的方向向量 $\overrightarrow{V_L}=(1,3)$，

$$\therefore \text{所求}=\frac{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{V_L}}{|\overrightarrow{V_L}|^2}\overrightarrow{V_L}=\frac{5+15}{10}(1,3)=(2,6)$$

2、試將向量 $\overrightarrow{a}=(7,4)$ 分解為與向量 $\overrightarrow{b}=(1,2)$ 平行與垂直的兩個分量______________。

解：設與 $\overrightarrow{b}=(1,2)$ 平行與垂直的兩個分量分別為 $\overrightarrow{u}$ 與 $\overrightarrow{v}$

則 $\overrightarrow{u}$ 是 $\overrightarrow{a}$ 在 $\overrightarrow{b}$ 上的正射影，

即 $\overrightarrow{u}=\left[\dfrac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{\left|\overrightarrow{b}\right|^2}\right]\overrightarrow{b}=\left(\dfrac{7+8}{5}\right)\overrightarrow{b}=(3,6)$

又 $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}=\overrightarrow{a}$

所以 $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{a}-\overrightarrow{u}=(7,4)-(3,6)=(4,-2)$

故所求為 $(3,6)$，$(4,-2)$

主題 7 柯西不等式學練區：

1、設 x, y 為實數，若 $3x-2y=5$，試求 $9x^2+y^2$ 的最小值及此時的數對 (x, y)。

解：利用柯西不等式得

$$\left[(3x)^2+y^2\right]\left[1^2+(-2)^2\right]\geq(3x-2y)^2$$

$$\Rightarrow(9x^2+y^2)\times5\geq(5)^2\Rightarrow9x^2+y^2\geq5$$

$\therefore 9x^2+y^2$ 的最小值為 5。

此時 $\dfrac{3x}{1}=\dfrac{y}{-2}=t\Rightarrow x=\dfrac{1}{3}t,\ y=-2t$

代入 $3x-2y=5\Rightarrow3(\dfrac{1}{3}t)-2(-2t)=5$

得 $t=1$ 故 $(x, y)=(\dfrac{1}{3},-2)$

2、試求 $\dfrac{4}{\cos^2\theta}+\dfrac{1}{\sin^2\theta}$ 之最小值。(提示：$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$)

解：利用柯西不等式

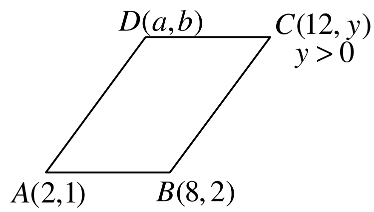
$$[(\frac{2}{\cos\theta})^2+(\frac{1}{\sin\theta})^2](\cos^2\theta+\sin^2\theta)\geq(\frac{2}{\cos\theta}\times\cos\theta+\frac{1}{\sin\theta}\times\sin\theta)^2$$

整理得 $\dfrac{4}{\cos^2\theta}+\dfrac{1}{\sin^2\theta}\geq9$，最小值為 9

主題 8　二階行列式與面積整練區：

1、坐標平面上有一個平行四邊形 $ABCD$，其中點 A 的坐標爲 $(2,1)$，點 B 的坐標爲 $(8,2)$，點 C 在第一象限且知其 x 坐標爲 12。若平行四邊形 $ABCD$ 的面積等於 38 平方單位，則點 D 的坐標爲_____________。【99.學測】

解：假設 D 的坐標爲 (a,b)，C 的坐標爲 $(12,y)$，



$\because ABCD$ 爲平行四邊形，

$\therefore \overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}\Rightarrow(12-a,y-b)=(6,1)$

$\Rightarrow D$ 的坐標爲 $(6,b)$，

則 $\overrightarrow{AB}=(6,1)$，$\overrightarrow{AD}=(4,b-1)\Rightarrow\left|\begin{vmatrix}6&1\\4&b-1\end{vmatrix}\right|=38$，

且點 C 在第一象限 $\Rightarrow b=8$，故點 D 的坐標爲(6,8)。

2、(1) $\triangle ABC$ 的三頂點爲 $A(2,-3)$、$B(3,1)$、$C(-4,3)$，試求 $\triangle ABC$ 的面積。
(2)判別 $A(1,5)$、$B(3,7)$、$C(-3,1)$ 三點是否共線。

解：(1) $\overrightarrow{AB}=(1,4)$, $\overrightarrow{AC}=(-6,6)$,

$$\text{則}\triangle ABC=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}1&4\\-6&6\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}|6+24|=15.$$

(2) $\overrightarrow{AB}=(2,2)$, $\overrightarrow{AC}=(-4,-4)$

$$\text{則}\triangle ABC=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}2&2\\-4&-4\end{vmatrix}\right|=0,$$

所以 $A(1,5)$、$B(3,7)$、$C(-3,1)$ 三點共線

3、已知由向量 $\vec{u}=(a,b)$ 與 $\vec{v}=(c,d)$ 所張出的平行四邊形面積爲 5，則由向量 $3\vec{u}-2\vec{v}$ 與 $\vec{u}+\vec{v}$ 所張出的平行四邊形面積爲_____________。

解：依題意知 $\left|\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}\right|=5$

又 $3\vec{u}-2\vec{v}=3(a,b)-2(c,d)=(3a-2c,3b-2d)$

$\vec{u}+\vec{v}=(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$

向量 $3\vec{u}-2\vec{v}$ 與 $\vec{u}+\vec{v}$ 所張出的平行四邊形面積爲

$$\left\|\begin{matrix}3a-2c&3b-2d\\a+c&b+d\end{matrix}\right\|=\left|\begin{vmatrix}3a&3b\\c&d\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-2c&-2d\\a&b\end{vmatrix}\right|$$

$$=\left|3\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}\right|=5\left|\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}\right|=5\times5=25$$

主題 9 一次方程組學練區：

1、已知方程組$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1\\a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$的解為$(-2,1)$，則方程組$\begin{cases}3a_1x+2b_1y=5c_1\\3a_2x+2b_2y=5c_2\end{cases}$的解為________。

解：依題意得

$$x=\frac{\begin{vmatrix}c_1&b_1\\c_2&b_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}}=-2,\quad y=\frac{\begin{vmatrix}a_1&c_1\\a_2&c_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}}=1$$

則方程組$\begin{cases}3a_1x+2b_1y=5c_1\\3a_2x+2b_2y=5c_2\end{cases}$的解為

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}5c_1&2b_1\\5c_2&2b_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3a_1&2b_1\\3a_2&2b_2\end{vmatrix}}=\frac{5\times2\times\begin{vmatrix}c_1&b_1\\c_2&b_2\end{vmatrix}}{3\times2\times\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}}=\frac{5}{3}\times(-2)=-\frac{10}{3}$$

$$y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}3a_1&5c_1\\3a_2&5c_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3a_1&2b_1\\3a_2&2b_2\end{vmatrix}}=\frac{3\times5\times\begin{vmatrix}a_1&c_1\\a_2&c_2\end{vmatrix}}{3\times2\times\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}}=\frac{5}{2}\times1=\frac{5}{2}$$

即$(x,y)=(-\frac{10}{3},\frac{5}{2})$

2、若方程組$\begin{cases}kx+4y=k+2\\x+ky=k\end{cases}$無解，則$k=$__________。

解：∵方程組無解

$\therefore\begin{vmatrix}k&4\\1&k\end{vmatrix}=0$，解得$k=\pm2$

(1) $k=2$時

方程組$\begin{cases}2x+4y=4\\x+2y=2\end{cases}$，表二重合直線，方程組無限多組解。

(2) $k=-2$時

方程組$\begin{cases}-2x+4y=0\\x-2y=-2\end{cases}$，表二平行直線，方程組無解。

故方程組$\begin{cases}kx+4y=k+2\\x+ky=k\end{cases}$無解，則$k=-2$。