主題 1　等差數列與等差級數學練習：

1、數列 a_1+2，……，a_k+2k，……，$a_{10}+20$ 共有十項，且其和為 240，則 $a_1+a_2+\cdots\cdots+a_k+\cdots+a_{10}$ 之值為

(1) 31　(2) 120　(3) 130　(4) 185　(5) 218

解：$(a_1+2)+(a_2+2\times2)+\cdots\cdots+(a_{10}+20)=240$

$(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{10})+(2+4+\cdots\cdots+20)=240$

$(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{10})+110=240$

$a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{10}=240-110=130$，選(3)

2、一等差數列共有奇數個項，若奇數項之總和為 91，偶數項之總和為 84，則此數列共有多少項？

解：設等差數列首項為 a_1，項數為 $2k+1$，則中間項為 a_{k+1}

$$\therefore \begin{cases} a_1+a_3+\cdots\cdots+a_{2k+1}=91\cdots① \\ a_2+a_4+\cdots\cdots+a_{2k}=84\cdots② \end{cases}$$

①−② 得　$a_1+(a_3-a_2)+(a_5-a_4)+\cdots\cdots+(a_{2k+1}-a_{2k})=91-84$

即　$a_1+kd=7 \ \Rightarrow\ a_{k+1}=7$ (中間項)

故　$91+84=(2k+1)a_{k+1}=7(2k+1)$，解得　$2k+1=25$

3、某巨蛋球場 E 區共有 25 排座位，此區每一排都比其前一排多 2 個座位。小明坐在正中間那一排(即第 13 排)，發現此排共有 64 個座位，則此球場 E 區共有__________個座位。

解：$\because a_1+a_{25}=a_2+a_{24}=\cdots\cdots=a_{12}+a_{14}=2a_{13}$

$\therefore a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{25}=25a_{13}=25\times64=1600$

4、有一等差數列 $<a_n>$，$S_n=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n$，若 $a_1=42$，且 $S_7=S_{15}$，試求

(1)數列 $<a_n>$ 從第_________項開始為負數。

(2)前 n 項和 S_n 的最大值__________。

(3)前 n 項和 S_n 開始為負時，n 的最小值為_________。

解：(1)依題意列式

$$\frac{7}{2}[2\times42+(7-1)d]=\frac{15}{2}[2\times42+(15-1)d]$$

解得　$d=-4$

$\therefore a_n=42+(n-1)\times(-4)=46-4n$

當　$a_n=46-4n<0 \ \Rightarrow\ n>11\frac{1}{2}$

故從第 12 項開始為負數

(2)由(1)知S_{11}爲最大值，

其值爲 $S_{11}=\frac{11}{2}[2\times 42+10\times(-4)]=242$

(3) $S_n=\frac{n}{2}[2\times 42+(n-1)\times(-4)]<0$，

即 $n(44-2n)<0$，又$n>0$

所以 $44-2n<0 \Rightarrow n>22$ ，故最小n爲 23

5、設各項都是實數的等差數列$a_1,a_2,a_3,\cdots$之公差爲正實數α。試選出正確的選項。

(1) 若$b_n=-a_n$，則$b_1>b_2>b_3>\cdots$ (2) 若$c_n=a_n^{\ 2}$，則$c_1<c_2<c_3<\cdots$

(3) 若$d_n=a_n+a_{n+1}$，則$d_1,d_2,d_3,\cdots$是公差爲α的等差數列

(4) 若$e_n=a_n+n$，則$e_1,e_2,e_3,\cdots$是公差爲$\alpha+1$的等差數列

(5) 若f_n爲$a_1,a_2,\cdots,a_n$的算術平均數，則$f_1,f_2,f_3,\cdots$是公差爲α的等差數列

【108學測】

解：等差數列$\langle a_n\rangle=\langle a_1,\ a_1+\alpha,\ a_1+2\alpha,\ a_1+3\alpha,\cdots\cdots\rangle$， $\alpha>0$

(1)對；$\langle b_n\rangle=\langle -a_n\rangle=\langle -a_1,\ -a_1-\alpha,\ -a_1-2\alpha,\ -a_1-3\alpha,\cdots\cdots\rangle\Rightarrow b_1>b_2>b_3>\cdots\cdots$

(2)錯；取$\langle a_n\rangle=\langle -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\rangle\Rightarrow\langle c_n\rangle=\langle a_n^{\ 2}\rangle=\langle 9,\ 4,\ 1,\ 0,\ 1,\ 4\rangle$

(3)錯；$\langle d_n\rangle=\langle a_n+a_{n+1}\rangle=\langle 2a_1+\alpha,\ 2a_1+3\alpha,\ 2a_1+5\alpha,\cdots\cdots\rangle$爲公差$2\alpha$的等差數列

(4)對；$\langle e_n\rangle=\langle a_n+n\rangle=\langle a_1+1,\ a_1+\alpha+2,\ a_1+2\alpha+3,\ a_1+3\alpha+4,\cdots\cdots\rangle$

$=\langle a_1+1,\ (a_1+1)+(\alpha+1),\ (a_1+1)+2(\alpha+1),\ (a_1+1)+3(\alpha+1),\cdots\cdots\rangle$

爲公差$\alpha+1$的等差數列

(5)錯；取$\langle a_n\rangle=\langle 1,2,3,4,5\rangle$公差1的等差數列

$\Rightarrow\langle f_n\rangle=\left\langle 1,\frac{3}{2},2,\frac{5}{2},3\right\rangle$公差$\frac{1}{2}$的等差數列

故選(1)(4)

主題 2 等比數列與等比級數演練區：

1、設四個正整數 a、b、c、d 為等比數列，且 $a+b=15$，$c+d=60$，則此四數為__________。

解：依據題意得

$$\begin{cases} a+ar=15 \\ ar^2+ar^3=60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a(1+r)=15\cdots\cdots① \\ ar^2(1+r)=60\cdots② \end{cases}$$

②÷①得 $r^2=4 \Rightarrow r=\pm 2$（負不合）

$r=2$ 代入① $a(1+2)=15$ $a=5$

故知四數為 5，10，20，40

2、已知 a_1,a_2,a_3 為一等差數列，而 b_1,b_2,b_3 為一等比數列，且此六數皆為實數。試問下列哪些選項是正確的？

(1) $a_1<a_2$ 與 $a_2>a_3$ 可能同時成立　(2) $b_1<b_2$ 與 $b_2>b_3$ 可能同時成立

(3)若 $a_1+a_2<0$，則 $a_2+a_3<0$　(4)若 $b_1b_2<0$，則 $b_2b_3<0$

(5)若 b_1,b_2,b_3 皆為正整數且 $b_1<b_2$，則 b_1 整除 b_2

解：(1)錯； $\because a_1,a_2,a_3$ 為一等差數列，$\therefore$ 公差 $d=a_2-a_1=a_3-a_2$

$\Rightarrow a_1<a_2$ 與 $a_2>a_3$ 不可能同時成立。

(2)對； $\because b_1,b_2,b_3$ 為一等比數列，當公比 $r<0$ 時，$b_1<b_2$ 與 $b_2>b_3$ 可能同時成立。

(3)錯； 當 $a_1=-4$，$a_2=-1$，$a_3=2$ 時，則 $a_1+a_2<0$，但 $a_2+a_3=1>0$。

(4)對； 若 $b_1b_2<0 \Rightarrow r=\dfrac{b_2}{b_1}<0$，則 $\dfrac{b_3}{b_2}=r<0 \Rightarrow b_2b_3<0$。

(5)錯； 若 b_1,b_2,b_3 皆為正整數且 $b_1<b_2 \Rightarrow 1<\dfrac{b_2}{b_1}=r$， r 不一定為整數，

故 b_1 整除 b_2 不一定成立.

故選(2)(4)

3、已知三正數成等差數列，其和為 21。若三數由小而大依序加 2，3，13 後成為等比數列，則此三數為何？

解：(1)設此三正數為 $a-d$，a，$a+d$，則

$(a-d)+a+(a+d)=21 \Rightarrow a=7$

即三正數為 $7-d$，7，$7+d$

(2)三數由小而大依序加 2，3，13 後成為

$9-d$，10，$20+d$ 的等比數列

$\therefore\ 10^2=(9-d)(20+d)$

整理得 $d^2+11d-80=0$

即 $(d-5)(d+16)=0 \Rightarrow d=5$ 或 $d=-16$

① $d=5$ 時，三數 2、7、12。　② $d=-16$ 時，三數 23、7、-9。(不合)

4、某君於九十年初，在甲、乙、丙三家銀行各存入十萬元，各存滿一年後，分別取出。已知該年各銀行之月利率如下表，且全年十二個月皆依機動利率按月以複利計息。

	甲銀行	乙銀行	丙銀行
1-4 月	0.3%	0.3%	0.3%
5-8 月	0.3%	0.4%	0.2%
9-12 月	0.3%	0.2%	0.4%

假設存滿一年，某君在甲、乙、丙三家銀行存款的本利和分別爲 a、b、c 元，請問下列哪些式子爲真？

(1) $a>b$　(2) $a>c$　(3) $b>c$　(4) $a=b=c$　【91.指考甲】

解：$a=10000\times(1+0.3\%)^{12}$

$b=10000\times(1+0.3\%)^4\times(1+0.4\%)^4\times(1+0.2\%)^4$

$c=10000\times(1+0.3\%)^4\times(1+0.2\%)^4\times(1+0.4\%)^4$

$\therefore b=c$

又 $a=10000\times(1+0.3\%)^{12}=10000\times(1.003)^4\times[(1.003)^2]^4$

$=10000\times(1.003)^4\times[1.006009]^4$

$b=10000\times(1+0.3\%)^4\times(1+0.4\%)^4\times(1+0.2\%)^4$

$=10000\times(1.003)^4\times[(1.004)\times(1.002)]^4=10000\times(1.003)^4\times[1.006008]^4$

故 $a>b=c$，選(1)(2)

5、已知正實數數列 a,b,c,d,e 爲等比數列，且 $a<b<c<d<e$，試選出下列爲等比數列的選項。

(1) $a,-b,c,-d,e$　(2) e,d,c,b,a　(3) $\log a,\log b,\log c,\log d,\log e$

(4) $3^a,3^b,3^c,3^d,3^e$　(5) abc,bcd,cde　【113.學測 B】

解：由題意 $0<a<b<c<d<e$，且數列 a,b,c,d,e 爲等比數列，

$\therefore r=\dfrac{b}{a}=\dfrac{c}{b}=\dfrac{d}{c}=\dfrac{e}{d}>1$

(1)對：$\dfrac{-b}{a}=\dfrac{c}{-b}=\dfrac{-d}{c}=\dfrac{e}{-d}=-r$

(2)對：$\dfrac{d}{e}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{b}{c}=\dfrac{a}{b}=\dfrac{1}{r}$

(3)錯：例：$a=1,b=10,c=100,d=1000,e=10000$

則 $\langle\log a,\log b,\log c,\log d,\log e\rangle=\langle 0,1,2,3,4\rangle$，爲等差

(4)錯：同(3)的例子，$3^1,3^{10},3^{100},3^{1000},3^{10000}$，不爲等比

(5)對：$\dfrac{bcd}{abc}=\dfrac{d}{a}$，$\dfrac{cde}{bcd}=\dfrac{e}{b}$，$\because \dfrac{b}{a}=\dfrac{e}{d}\Rightarrow\dfrac{d}{a}=\dfrac{e}{b}$，爲等比

故選(1)(2)(5)

主題 3　遞迴數列與遞迴關係實練區：

1、每週同一時間點記錄某植物的成長高度，連續五週的數據為 $a_1=1$，$a_2=2$，$a_3=6$，$a_4=15$，$a_5=31$。請問此成長高度數列滿足下列選項中哪一個式子？

(1) $a_{t+1}=3a_t-1$，$t=1,2,3,4$　　(2) $a_t=t!$，$t=1,2,3,4,5$

(3) $a_{t+1}=a_t+t^2$，$t=1,2,3,4$　　(4) $a_t=2^t-1$，$t=1,2,3,4,5$

(5) $a_{t+1}=ta_t+1$，$t=1,2,3,4$.

解：觀察 $a_2-a_1=1$，$a_3-a_2=4$，$a_4-a_3=9$，$a_5-a_4=16$，

可知 $a_{t+1}-a_t=t^2$，$t=1,2,3,4$，即 $a_{t+1}=a_t+t^2$，$t=1,2,3,4$, 故選(3).

2、數列 $<a_n>$ 滿足 $2a_{n+1}+a_n=3$，且 $a_1=10$，試求等比數列 $\langle a_n-1\rangle$ 的公比

(1) $\frac{2}{3}$　(2) $\frac{1}{2}$　(3) $\frac{1}{3}$　(4) $-\frac{1}{3}$　(5) $-\frac{1}{2}$

解：由 $2a_{n+1}+a_n=3$ 得 $2(a_{n+1}-1)=-(a_n-1)\Rightarrow\frac{a_{n+1}-1}{a_n-1}=-\frac{1}{2}$

$\therefore$ $<a_n-1>$ 為等比數列，其首項 $a_1-1=10-1=9$，公比 $r=-\frac{1}{2}$，選(5)

3、遞迴數列 $<a_n>$ 滿足 $a_n=a_{n-1}+f(n-2)$，其中 $n\geq 2$ 且 $f(x)$ 為二次多項式.

若 $a_1=1$，$a_2=2$，$a_3=5$，$a_4=12$，則 $a_5=$ __________。

解：根據題意, 得知：

當 $n=2$ 時, $a_2=a_1+f(0)\Rightarrow 2=1+f(0)$　$\therefore f(0)=1$,

當 $n=3$ 時, $a_3=a_2+f(1)\Rightarrow 5=2+f(1)$　$\therefore f(1)=3$,

當 $n=4$ 時, $a_4=a_3+f(2)\Rightarrow 12=5+f(2)$　$\therefore f(2)=7$,

$\because f(x)$ 為二次多項式, 設 $f(x)=ax^2+bx+c$

$\therefore f(0)=1=c$，$f(1)=3=a+b+c$，$f(2)=7=4a+2b+c$

$\Rightarrow$ 解得 $a=b=c=1$　　即 $f(x)=x^2+x+1$,

當 $n=5$ 時，$a_5=a_4+f(3)=12+9+3+1=25$.

4、人從階梯上表演平台，每步可上一階或二階，已知此階梯共有 10 階，則此人共有多少種從階梯上表演平台的方法？

解：令 a_n 表示走 n 階的方法數

(1)第一步走一階，剩下 $(n-1)$ 階，方法數為 a_{n-1}.

(2)第一步走兩階，剩下 $(n-2)$ 階，方法數為 a_{n-2}.

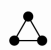
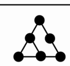
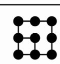
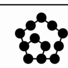
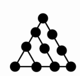
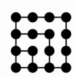
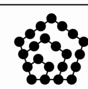
故 $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$， $n \geq 3$ 且 $a_1 = 1$，$a_2 = 2$，

利用下表求 a_{10}

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89

所以從階梯上表演平台的方法有 89 種

5、用大小一樣的鋼珠可以排成正三角形、正方形與正五邊形陣列，其排列的規律如下圖所示：

	正三角形陣列	正方形陣列	正五邊形陣列
每邊1個鋼珠	•	•	•
每邊2個鋼珠			
每邊3個鋼珠			
每邊4個鋼珠			

已知 m 個鋼珠恰好可以排成每邊 n 個鋼珠的正三角形陣列與正方形陣列各一個；選出下列正確的選項。

(1)排每邊 10 個鋼珠的正三角形陣列，共需 54 個鋼珠。

(2)排每邊 10 個鋼珠的正方形陣列，共需 100 個鋼珠。

(3)排每邊 6 個鋼珠的正五邊形陣列，共需 50 個鋼珠。

(4)若 $m = 15$，則 $n = 3$。

(5) m，n 二數的關係式為 $m = 2n^2 + n$。

解：

每邊 n 個	正三角形鋼珠數	正方形鋼珠數	和
$n=1$	1	1	1+1
$n=2$	1+2	4	3+4
$n=3$	1+2+3	9	6+9
⋮	⋮	⋮	⋮
n	$1+2+3+\cdots+n$	n^2	$\dfrac{n(n+1)}{2}+n^2=\dfrac{3n^2+n}{2}$

每邊 n 個	正五邊形鋼珠數
$n=1$	1
$n=2$	5(=1+4)
$n=3$	12(=1+4+7)
$n=4$	22(=1+4+7+10)
⋮	⋮
n	$1+4+7+\cdots+[3(n-1)+1]=\dfrac{[2+(n-1)\times 3]\times n}{2}$

(1)錯；$n=10\Rightarrow$正三角形陣列，共需 $1+2+3+\cdots+10=\dfrac{10(10+1)}{2}=55$ 個鋼珠

(2)對；$n=10\Rightarrow$正方形陣列，共需 $10^2=100$ 個鋼珠

(3)錯；$n=6\Rightarrow$正五邊形陣列，共需$1+4+7+10+13+16=51$個鋼珠

(4)對；$n=3\Rightarrow m=(1+2+3)+3^2=15$

(5)錯；$m=(1+2+3+\cdots\cdots+n)+n^2=\dfrac{3n^2+n}{2}$

故選 (2)(4)

主題 4　級數、Σ的運算齊練區：

1、設數列$\langle a_n \rangle$前 n 項的和$a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n=2^{n+1}\times(n^2-2n)$，

則此數列的第 n 項$a_n=$＿＿＿＿＿＿。

解：由　$a_n=S_n-S_{n-1}\quad(n\geq 2)$

得　$a_n=2^{n+1}\times(n^2-2n)-2^{(n-1)+1}\times[(n-1)^2-2(n-1)]$

$=2^n(2n^2-4n)-2^n(n^2-4n+3)$

$=2^n(2n^2-4n-n^2+4n-3)=2^n(n^2-3)$

又　$a_1=S_1=2^{1+1}(1^2-2)=-4$合乎上式

$\therefore a_n=2^n(n^2-3)$，$n\in N$

2、試求下列級數之值：

(1) $21^2+22^2+23^2+\cdots\cdots+30^2$

(2) $1^3+3^3+5^3+7^3+\cdots\cdots+15^3$

解：(1) $21^2+22^2+23^2+\cdots\cdots+30^2$

$=(1^2+2^2+\cdots+20^2+21^2+\cdots+30^2)-(1^2+2^2+\cdots+20^2)$

$=9455-2870=6585$

(2) $1^3+3^3+5^3+7^3+\cdots\cdots+15^3$

$=(1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots\cdots+15^3)-(2^3+4^3+\cdots\cdots+14^3)$

$=\sum_{k=1}^{15}k^3-\sum_{k=1}^{7}(2k)^3$

$=\sum_{k=1}^{15}k^3-8\sum_{k=1}^{7}k^3$

$=(\frac{15\times16}{2})^2-8(\frac{7\times8}{2})^2=8128$

3、觀察右列 3×3 與 4×4 方格中的數字規律：
如果在 10×10 的方格上，仿上面規律填入數字，則所填入的 100 個數字之總和為__________。

1	2	3
1	2	2
1	1	1

1	2	3	4
1	2	3	3
1	2	2	2
1	1	1	1

解：觀察右圖箭頭方向，

$1=1^2$，$1+2+1=2^2$，……，

$1+2+\cdots+k+\cdots+2+1=k^2$

則 100 個數字之總和為

$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+10^2=\frac{10\times11\times21}{6}=385$$

1	2	3
1	2	2
1	1	1

1	2	3	4
1	2	3	3
1	2	2	2
1	1	1	1

4、觀察圖中數字規律，若 a_n 表示 $n\times n$ 方格內數字的總和，且 $a_{n+1}=a_n+f(n)$，其中 $f(n)$ 為 n 的多項式，則下列哪些選項正確？

1

a_1

1	2
2	1

a_2

1	2	3
2	1	2
3	2	1

a_3

1	2	3	4
2	1	2	3
3	2	1	2
4	3	2	1

a_4

(1) $a_5=65$　(2) $f(n)$ 為一次式　(3) $f(n)$ 的常數項為 2

(4) $f(10)=131$　(5) $a_{15}-a_1=f(1)+f(2)+f(3)+\cdots\cdots+f(15)$

解：

1	2
2	1

$a_2=a_1+1+2+2=a_1+2(1+2)-1$

1	2	3
2	1	2
3	2	1

$a_3=a_2+2(1+2+3)-1$

⋮

觀察可得 $a_{n+1}=a_n+2[1+2+\cdots\cdots+(n+1)]-1$

$=a_n+(n+2)(n+1)-1$

$=a_n+n^2+3n+1$

故 $f(n)=n^2+3n+1$

得 $a_1=1$，$a_2=a_1+f(1)$，$a_3=a_2+f(2)$，$a_4=a_3+f(3)$，$a_5=a_4+f(4)$

所以 $a_5=1+f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=1+5+11+19+29=65$

$f(10)=10^2+3\times10+1=131$

$a_{15}=a_{14}+f(14)=\cdots=a_1+f(1)+f(2)+f(3)+\cdots f(14)$

選(1)(4)(5)

5、數列$\frac{1}{1},\frac{2}{1},\frac{1}{2},\frac{3}{1},\frac{2}{2},\frac{1}{3},\frac{4}{1},\frac{3}{2},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\cdots\cdots$，依此規律，試求

(1)數列的第 104 項爲__________。

(2)$\frac{8}{19}$是第__________項。

解：觀察分子＋分母之和進行分群

和	2	3	4	5	………
群(成員)	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1},\frac{1}{2}$	$\frac{3}{1},\frac{2}{2},\frac{1}{3}$	$\frac{4}{1},\frac{3}{2},\frac{2}{3},\frac{1}{4}$	………
個數	1	2	3	4	………

(1)$\because$ $1+2+3+\cdots\cdots+13=91<104$，$1+2+3+\cdots\cdots+13+14=105>104$

又 $104=91+13$

$\therefore$第 104 項爲第 14 群的第 13 個，即分子＋分母之和爲 15，分母爲 13，

故$a_{104}=\frac{2}{13}$。

(2) 分子＋分母：$8+19=27$，故$\frac{8}{19}$爲第 26 群的第 19 個，

由 $1+2+3+\cdots\cdots+25=\frac{25\times 26}{2}=325$，$325+19=344$

所以$\frac{8}{19}$爲第344項。