

115 年學測數學 A

一、單選題 (占 30 分)

1、財神廟舉辦抽發財金活動：參加者抽兩次籤，每次抽籤出現「吉」、「祥」的機率皆為 $\frac{1}{3}$ 。

如果兩次都抽得「吉」，獲得獎金 180 元；如果兩次都抽得「祥」，獲得獎金 90 元；其餘情況則無獎金。試問參加者可獲獎金的期望值為何？

- (1) 20 元 (2) 30 元 (3) 45 元 (4) 60 元 (5) 90 元

【115.學測A】

2、對任一實數 a ，令 $[a]$ 代表滿足 $[a] \leq a < [a] + 1$ 的整數，例如： $[3] = 3$ ， $[3.1] = 3$ ，

$[-3.1] = -4$ 。關於函數 $f(x) = [\sqrt{99-x}] + [\sqrt{99+x}]$ ，其中 $-99 \leq x \leq 99$ ；試選出正確的選項。

(1) $f(-20) \leq f(0) < f(1)$

(2) $f(-20) < f(1) \leq f(0)$

(3) $f(1) < f(-20) \leq f(0)$

(4) $f(0) < f(-20) \leq f(1)$

(5) $f(0) \leq f(1) < f(-20)$

【115.學測 A】

3、設 $f(x) = a^x$ ，其中 a 為正實數。已知 c_1, c_2, c_3 是公差為 $\frac{10}{3}$ 的等差數列，且 $f(c_1), f(c_2),$

$f(c_3)$ 是公比為 4 的等比數列。則等比數列 $f(10), f(8), f(6)$ 的公比為何？

(1) $2^{\frac{-6}{5}}$

(2) $2^{\frac{-3}{5}}$

(3) $2^{\frac{3}{5}}$

(4) $2^{\frac{6}{5}}$

(5) $2^{\frac{5}{3}}$

【115.學測 A】

- 4、某網遊有 16 種材料，其中 6 種為基本材料，10 種為進階材料。任選 3 種不同材料可以合成出草藥、食物、藥水中的 1 類道具，其合成規則如下：若 3 種材料均為基本材料，則合成結果必為同一種草藥；若 3 種材料中 2 種為基本材料、1 種為進階材料，則合成結果會根據不同的進階材料得到不同種的食物，但不會受到基本材料不同而改變；其他的組合都會合成出不同種的藥水。試問此網遊總共可合成出多少種道具？
- (1) 256 (2) 370 (3) 401 (4) 455 (5) 560

- 5、已知實數三階方陣 A 滿足 $A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ， $A \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ， $A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 。試問有多少個行向量 $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ 滿足 $A \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 且 \vec{v} 垂直於行向量 $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ？
- (1) 1 個 (2) 2 個 (3) 3 個 (4) 0 個 (5) 無窮多個 【115.學測 A】

6、坐標平面上有 $A(2, -2)$ 、 $B(-1, 2)$ 兩點，試問直線 $y = -6$ 上有多少個點 C 使得 $\triangle ABC$ 為等腰三角形？

- (1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4 (5) 5

【115.學測 A】

二、多選題 (占 30 分)

7、坐標平面上同時滿足 $\begin{cases} 2x-y-3>0 \\ x+2y+1<0 \end{cases}$ 的點 $P(x, y)$ 可能位在下列哪些選項？

(1) 第一象限

(2) 第二象限

(3) 第三象限

(4) 第四象限

(5) x 軸

【115.學測 A】

8、已知 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ，且對所有正整數 $n \geq 2$ ，令 $A^n = \begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{bmatrix}$ 。試選出正確的選項。

(1) $b_2 < c_2$

(2) $A^2 = 2A + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(3) $c_{n+2} = 2c_{n+1} + c_n$

(4) $\begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{n+1} \\ d_{n+1} \end{bmatrix}$

(5) $d_{2n} - a_{2n} = (d_n)^2 - (a_n)^2$ 【115.學測 A】

9、 T 分數為評量成績的一種方式，其計算方式如下：設全班平均成績為 μ 且標準差為 σ 。

若某生原始成績為 S ，則他該科之 T 分數為 $T = 50 + 10\left(\frac{S - \mu}{\sigma}\right)$ 。已知某班期末數學和英文兩科的平均成績皆為 60，數學成績的標準差為 12，英文成績的標準差為 8。試選出正確的選項。

- (1) 若甲生英文的原始成績為 52，則其 T 分數為 40
- (2) 各生數學的 T 分數不會超過其原始成績
- (3) 若乙生兩科的原始成績平均比丙生兩科的原始成績平均高，則乙生兩科的 T 分數平均比丙生兩科的 T 分數平均高
- (4) 若該班級兩科的及格標準均為 T 分數大於或等於 40，則數學及格的原始成績比英文及格的原始成績低
- (5) 該班原始成績數學對英文的迴歸直線 (即最適直線) 之斜率與該班 T 分數數學對英文的迴歸直線之斜率相同

【115.學測 A】

10、已知四邊形 $ABCD$ 中， \overline{AB} 平行 \overline{DC} ， \overline{AC} 與 \overline{BD} 交於 E 。若 $\overrightarrow{AB} = (2, -6)$ ， $\overrightarrow{AD} = (1, 5)$ 且 $\triangle ABE$ 面積為 3。試選出正確的選項。

(1) $\cos \angle BAD = \frac{-7\sqrt{65}}{65}$

(2) $\triangle ABD$ 面積為 9

(3) $\overrightarrow{AE} = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

(4) 四邊形 $ABCD$ 面積為 $\frac{65}{3}$

(5) $\overline{BC} < \frac{8}{3}$

【115.學測 A】

11、令 Γ 為坐標平面上 $y = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ 的圖形。對任一實數 $m \neq 0$ ，以 L_m 表示直線 $y = mx + 1$ 。

試選出正確的選項。

(1) $m > 0$ 時， L_m 和 Γ 交點的 x 坐標皆為負

(2) 若 (a, b) 為 L_m 和 Γ 的交點，則 $(-a, b)$ 為 L_{-m} 和 Γ 的交點

(3) 可以找到一實數 $m \neq 0$ 使得 L_m 和 Γ 交於點 $\left(\frac{20}{3}, \frac{1}{2}\right)$

(4) 若 L_m 與 Γ 有一交點在直線 $y = -1$ 上，則 $\frac{1}{m}$ 是奇數

(5) 若 L_m 與 Γ 有一交點在 x 軸上，則 L_m 與 Γ 有偶數個交點

【115.學測A】

12、令 $f(x)$ 、 $g(x)$ 為實係數三次多項式且 $f(x)$ 的首項係數為 1，已知 $f(x) - g(x) = 2x^3 + 2x$ 。
令 Γ_1 和 Γ_2 分別為 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在坐標平面上的函數圖形，其對稱中心分別為 (a_1, b_1) ， (a_2, b_2) 。試選出正確的選項。

(1) Γ_1 和 Γ_2 恰交於三點

(2) $a_1 + a_2$ 可唯一確定

(3) $b_1 + b_2$ 可唯一確定

(4) 若 $a_1 = a_2$ ，則 $b_1 = b_2$

(5) 若 $b_1 = b_2$ ，則 $a_1 = a_2$

【115.學測A】

三、選填題(占 25 分)

- 13、高中聘用的全體教師 $\frac{1}{4}$ 只有學士學位， $\frac{3}{4}$ 有碩士學位。只有學士學位的教師中有 $\frac{1}{5}$ 通過英聽檢定，有碩士學位的教師中有 $\frac{3}{5}$ 通過英聽檢定。已知每位教師被抽到的機會相等，若隨機抽選一位通過英聽檢定的教師，則該教師有碩士學位的條件機率為_____。

【115.學測 A】

- 14、坐標平面上，向量 (a, b) 與直線 $y = bx - 1$ 垂直，則 $a + b$ 的最大可能值為_____。

【115.學測 A】

- 15、已知三正數 a, b, c 成一等差數列，其中 $a < b < c$ ，且坐標平面上三點 $(a, \log 3a)$ 、 $(b, \log 4b)$ 、 $(c, \log 6c)$ 在同一直線上，則 $\frac{b}{a}$ 之值為_____。(化為最簡分數)

【115.學測 A】

16、坐標平面上，已知二次函數圖形 $\Gamma: y=f(x)$ 的頂點 P 在直線 $y=1+2x$ 上，且交 x 軸於點 $A\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ 、 $B\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ 。將 Γ 平移使得平移後圖形的頂點 Q 仍在直線 $y=1+2x$ 上，且亦通過點 $B\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ ，此時 P 、 Q 為兩相異點，則 $\overline{PQ} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(化為最簡根式)

【115.學測 A】

17、直角 $\triangle ABC$ 中， $\angle CAB$ 為直角， \overline{AB} 邊上一點 D ，滿足 $\angle BCD=2\angle ACD$ ，且 $\overline{BC}=2\overline{BD}$ 。

若 $\overrightarrow{AD}=k\overrightarrow{AB}$ ，則 $k=\underline{\hspace{2cm}}$ 。(化為最簡分數)

【115.學測 A】

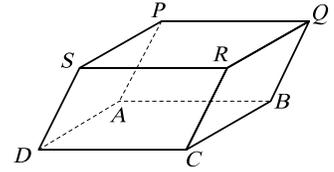
四、混合題或非選擇題（占 15 分）

18–20 題為題組

坐標空間中有一平行六面體 $PQRS-ABCD$ ，如圖所示。已知

$$\vec{AB} \times \vec{AD} = (-5, 5, 5), \vec{AD} \times \vec{AP} = (-2, 0, -4),$$

$$\vec{AP} \times \vec{AB} = (6, -10, -8), |\vec{AP}| = 6。試回答下列問題。$$



18、試問平行四邊形 $ABCD$ 的面積為何？（單選題，3 分）

- (1) $2\sqrt{5}$ (2) $5\sqrt{2}$ (3) $5\sqrt{3}$ (4) $6\sqrt{3}$ (5) $10\sqrt{2}$

【115.學測 A】

19、設 B 點坐標為 $(1, 2, 0)$ ，試求平面 $ABCD$ 的平面方程式。（非選擇題，4 分）

【115.學測 A】

20、試求平行六面體的體積，並求平行六面體上（含邊界）距點 A 的最長距離。

（非選擇題，8 分） 【115.學測 A】