115 年學測數學 A

一、單選題（占 30 分）

1、財神廟舉辦抽發財金活動：參加者抽兩次籤，每次抽籤出現「吉」、「祥」的機率皆為 $\frac{1}{3}$ 。如果兩次都抽得「吉」，獲得獎金 180 元；如果兩次都抽得「祥」，獲得獎金 90 元；其餘情況則無獎金。試問參加者可獲獎金的期望值為何？

(1) 20 元　(2) 30 元　(3) 45 元　(4) 60 元　(5) 90 元　【115.學測A】

測驗目標：獨立事件與期望值的計算

解：機率分布如下表：

情形	2 吉	2 祥	其他
獎金	180 元	90 元	0 元
機率	$\left(\frac{1}{3}\right)^2$	$\left(\frac{1}{3}\right)^2$	$1-\left(\frac{1}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2$

所以 期望值為 $180\times\left(\frac{1}{3}\right)^2+90\times\left(\frac{1}{3}\right)^2+0\times\left(\frac{7}{9}\right)=20+10+0=30$ (元)

故選(2)

2、對任一實數 a，令 $[a]$ 代表滿足 $[a]\le a<[a]+1$ 的整數，例如：$[3]=3$，$[3.1]=3$，$[-3.1]=-4$。關於函數 $f(x)=[\sqrt{99-x}]+[\sqrt{99+x}]$，其中 $-99\le x\le 99$；試選出正確的選項。

(1) $f(-20)\le f(0)<f(1)$　(2) $f(-20)<f(1)\le f(0)$

(3) $f(1)<f(-20)\le f(0)$　(4) $f(0)<f(-20)\le f(1)$

(5) $f(0)\le f(1)<f(-20)$　【115.學測 A】

測驗目標：根式的估計

解：$f(-20)=\left[\sqrt{99-(-20)}\right]+\left[\sqrt{99+(-20)}\right]=\left[\sqrt{119}\right]+\left[\sqrt{79}\right]=10+8=18$

$f(0)=\left[\sqrt{99-(0)}\right]+\left[\sqrt{99+(0)}\right]=\left[\sqrt{99}\right]+\left[\sqrt{99}\right]=9+9=18$

$f(1)=\left[\sqrt{99-(1)}\right]+\left[\sqrt{99+(1)}\right]=\left[\sqrt{98}\right]+\left[\sqrt{100}\right]=9+10=19$

$\therefore\ f(-20)\le f(0)<f(1)$

故選(1)

3、設 $f(x)=a^x$，其中 a 為正實數。已知 c_1，c_2，c_3 是公差為 $\dfrac{10}{3}$ 的等差數列，且 $f(c_1)$，$f(c_2)$，$f(c_3)$ 是公比為 4 的等比數列。則等比數列 $f(10)$，$f(8)$，$f(6)$ 的公比為何？

(1) $2^{\frac{-6}{5}}$　(2) $2^{\frac{-3}{5}}$　(3) $2^{\frac{3}{5}}$　(4) $2^{\frac{6}{5}}$　(5) $2^{\frac{5}{3}}$　【115.學測 A】

測驗目標：等差、等比數列的應用與指數律運算

解：∵ $f(c_1)$，$f(c_2)$，$f(c_3)$ 的公比為 4

∴ $\dfrac{f(c_2)}{f(c_1)}=\dfrac{a^{c_2}}{a^{c_1}}=a^{c_2-c_1}=4$

又 c_1，c_2，c_3 是公差為 $\dfrac{10}{3}$ 的等差數列

得 $a^{c_2-c_1}=a^{\frac{10}{3}}=4\Rightarrow a=4^{\frac{3}{10}}$

故所求公比為 $\dfrac{f(8)}{f(10)}=\dfrac{a^8}{a^{10}}=a^{-2}=(4^{\frac{3}{10}})^{-2}=4^{-\frac{3}{5}}=(2^2)^{-\frac{3}{5}}=2^{-\frac{6}{5}}$

選(1)

4、某網遊有 16 種材料，其中 6 種為基本材料，10 種為進階材料。任選 3 種不同材料可以合成出草藥、食物、藥水中的 1 類道具，其合成規則如下：若 3 種材料均為基本材料，則合成結果必為同一種草藥；若 3 種材料中 2 種為基本材料、1 種為進階材料，則合成結果會根據不同的進階材料得到不同種的食物，但不會受到基本材料不同而改變；其他的組合都會合成出不同種的藥水。試問此網遊總共可合成出多少種道具？

(1) 256　(2) 370　(3) 401　(4) 455　(5) 560

測驗目標：能夠瞭解排列與組合原理

解：依題意分為三種情形

①3 種材料均為基本材料 $\Rightarrow$ 選法有 C_3^6 種方法

合成結果必為同一種草藥，所以只有一種草藥

②3 種材料中 2 種為基本材料、1 種為進階材料 $\Rightarrow$ 選法有 $C_2^6\times C_1^{10}$ 種方法

合成結果會根據不同的進階材料得到不同種的食物，有 $C_1^{10}=10$ 種食物

③其他的組合都會合成出不同種的藥水

即能合成 $C_3^{16}-C_3^6-C_2^6\times C_1^{10}=390$ 種藥水

故共可合成出 $1+10+390=401$ 種道具，選(3)

5、已知實數三階方陣 A 滿足 $A\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}$，$A\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$，$A\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$。試問有多少個行

向量 $\overrightarrow{v}=\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix}$ 滿足 $A\overrightarrow{v}=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$ 且 $\overrightarrow{v}$ 垂直於行向量 $\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$？

(1) 1 個 (2) 2 個 (3) 3 個 (4) 0 個 (5)無窮多個 【115.學測 A】

測驗目標：線性組合與矩陣乘法

解：設 $\overrightarrow{v}=a\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$，其中 a，b，c 為實數

則 $A\overrightarrow{v}=A\left(a\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$

即 $a\left(A\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right)+b\left(A\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}\right)+c\left(A\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$

$\Rightarrow a\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$ $\Rightarrow\begin{bmatrix}b\\-a+b\\a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$

得 $a=1$，$b=1$，c 為實數

故 $\overrightarrow{v}=1\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+1\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+c\\0\\1-c\end{bmatrix}$，$c$ 為實數

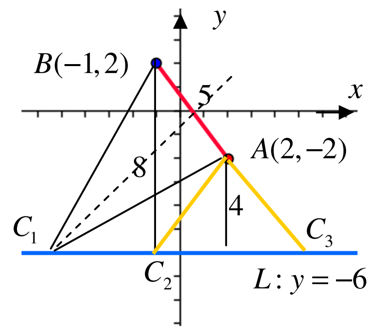
且 $(1+c,0,1-c)\cdot(0,1,0)=0$ ($\overrightarrow{v}$ 垂直於行向量 $\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$)，選(5)

6、坐標平面上有 $A(2\ ,-2)$，$B(-1\ ,2)$ 兩點，試問直線 $y=-6$ 上有多少個點 C 使得△ABC 為等腰三角形？

(1) 1　(2) 2　(3) 3　(4) 4　(5) 5　【115.學測 A】

測驗目標：直線、距離關係的應用

解：如右圖，$\overline{AB}=\sqrt{3^2+4^2}=5$



且 $d(A,L)=4$，$d(B,L)=8$

①若 $\overline{AC}=\overline{BC}$，則 C 在 $\overline{AB}$ 的垂直平分線上，

與 $L: y=-6$ 只有一個交點 C_1。

②若 $\overline{AC}=\overline{AB}=5$，則 $C_2\ (-1,-6)$，$C_3\ (5,-6)$ 有二點，

其中 A、B、C_3 三點共線(C_3 不合)。

③ $\overline{AB}\neq\overline{BC}$ ($\because \overline{AB}=5$，$\overline{BC}\geq 8$)

綜合①②③知有 2 個點 C 使得△ABC 為等腰三角形，選(2)

二、多選題（占 30 分）

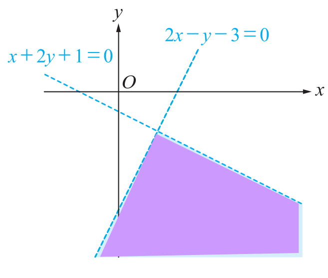
7、坐標平面上同時滿足$\begin{cases}2x-y-3>0\\x+2y+1<0\end{cases}$的點 $P(x\ ,\ y)$ 可能位在下列哪些選項？

(1)第一象限　　　　(2)第二象限　　　　(3)第三象限

(4)第四象限　　　　(5) x 軸　　　　【115.學測 A】

測驗目標：二元不等式的解區域

解：依題意，畫出聯立不等式的圖形，如下圖



故選(3)(4)

8、已知$A=\begin{bmatrix}2&1\\1&0\end{bmatrix}$，且對所有正整數 $n\geq 2$，令$A^n=\begin{bmatrix}a_n&b_n\\c_n&d_n\end{bmatrix}$。試選出正確的選項。

(1) $b_2<c_2$　　　　(2) $A^2=2A+\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$　　　　(3) $c_{n+2}=2c_{n+1}+c_n$

(4) $\begin{bmatrix}a_n&b_n\\c_n&d_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_{n+1}\\d_{n+1}\end{bmatrix}$　　　　(5) $d_{2n}-a_{2n}=(d_n)^2-(a_n)^2$　　【115.學測 A】

測驗目標：能運用矩陣乘法與遞迴關係

解：(1)錯：$A^2=\begin{bmatrix}2&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&2\\2&1\end{bmatrix}\Rightarrow b_2=c_2=2$

(2)對：$2A+\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}2&1\\1&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&2\\2&1\end{bmatrix}=A^2$

(3)錯：$\because A^2=2A+I\Rightarrow A^nA^2=A^n(2A+I)\Rightarrow A^{n+2}=2A^{n+1}+A^n$

$\therefore c_{n+2}=2c_{n+1}+c_n$

(若 $c_{n+2}=2c_{n+1}+c_n=c_{n+1}+2c_n$，則 $c_{n+1}=c_n$。但此題 $c_2=2$，$c_1=1$)

(4)錯：$\begin{bmatrix}a_n&b_n\\c_n&d_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_n\\d_n\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}b_{n+1}\\d_{n+1}\end{bmatrix}$($\because b_2=2$，$b_1=1$)

(5)對：由 $A^{2n}=A^n\cdot A^n$

$\Rightarrow\begin{bmatrix}a_{2n}&b_{2n}\\c_{2n}&d_{2n}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_n&b_n\\c_n&d_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_n&b_n\\c_n&d_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_n^{\ 2}+b_nc_n&a_nb_n+b_nd_n\\c_na_n+d_nc_n&c_nb_n+d_n^{\ 2}\end{bmatrix}$

$\therefore a_{2n}=a_n^{\ 2}+b_nc_n$，$d_{2n}=c_nb_n+d_n^{\ 2}$

故 $d_{2n}-a_{2n}=(b_nc_n+d_n^{\ 2})-(a_n^{\ 2}+b_nc_n)=d_n^{\ 2}-a_n^{\ 2}$

選(2)(5)

9、T 分數爲評量成績的一種方式，其計算方式如下：設全班平均成績爲 μ 且標準差爲 σ。若某生原始成績爲 S，則他該科之 T 分數爲 $T=50+10\left(\dfrac{S-\mu}{\sigma}\right)$。已知某班期末數學和英文兩科的平均成績皆爲 60，數學成績的標準差爲 12，英文成績的標準差爲 8。試選出正確的選項。

(1)若甲生英文的原始成績爲 52，則其 T 分數爲 40

(2)各生數學的 T 分數不會超過其原始成績

(3)若乙生兩科的原始成績平均比丙生兩科的原始成績平均高，則乙生兩科的 T 分數平均比丙生兩科的 T 分數平均高

(4)若該班級兩科的及格標準均爲 T 分數大於或等於 40，則數學及格的原始成績比英文及格的原始成績低

(5)該班原始成績數學對英文的迴歸直線 (即最適直線) 之斜率與該班 T 分數數學對英文的迴歸直線之斜率相同 【115.學測 A】

測驗目標：一維數據與二維數據的判讀與分析

解：依題意知 $\mu_M=\mu_E=60$，$\sigma_M=12$，$\sigma_E=8$

(1)對：$T_E=50+10\left(\dfrac{52-60}{8}\right)=40$

(2)對：$T_M=50+10\left(\dfrac{S_M-60}{12}\right)=\dfrac{5}{6}S_M\le S_M$，

(3)錯：由 $T_E=50+10\left(\dfrac{S_E-60}{8}\right)=\dfrac{5}{4}S_E-25$，$T_M=50+10\left(\dfrac{S_M-60}{12}\right)=\dfrac{5}{6}S_M$

得 $\dfrac{T_M+T_E}{2}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{5}{6}S_M+\dfrac{5}{4}S_E-25)$

故 當 $S_{M乙}=72$，$S_{E乙}=52$，$S_{M丙}=60$，$S_{E丙}=60$，$\dfrac{S_{M乙}+S_{E乙}}{2}=62>\dfrac{S_{M丙}+S_{E丙}}{2}=60$，

但 $\dfrac{T_{M乙}+T_{E乙}}{2}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{5}{6}\times72+\dfrac{5}{4}\times52-25)=50$，$\dfrac{T_{M丙}+T_{E丙}}{2}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{5}{6}\times60+\dfrac{5}{4}\times60-25)=50$

(4)對：$T_M=\dfrac{5}{6}S_M\ge40\Rightarrow S_M\ge48$，$T_E=\dfrac{5}{4}S_E-25\ge40\Rightarrow S_E\ge52$

(5)錯：由 $T=50+10\left(\dfrac{S-\mu}{\sigma}\right)$ 知 $r(T_M,T_E)=r(S_M,S_E)$，

又 $\sigma_{T_E}=10\sigma_{Z_E}=10\times1=10$，$\sigma_{T_M}=10\sigma_{Z_M}=10\times1=10$

所以 $m(S)=r(S_M,S_E)\cdot\dfrac{\sigma_{S_M}}{\sigma_{S_E}}=r(S_M,S_E)\cdot\dfrac{12}{8}=\dfrac{3}{2}r(S_M,S_E)$

$$m(T)=r(T_M,T_E)\cdot\dfrac{\sigma_{T_M}}{\sigma_{T_E}}=r(S_M,S_E)\cdot\dfrac{10}{10}=r(S_M,S_E)$$

故選(1)(2)(4)

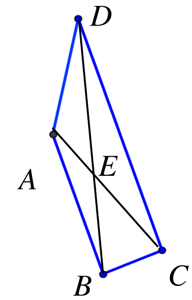
10、已知四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}$ 平行 $\overline{DC}$，$\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 交於 E。若 $\overrightarrow{AB}=(2,-6)$，$\overrightarrow{AD}=(1,5)$ 且 $\triangle ABE$ 面積為 3。試選出正確的選項。

(1) $\cos\angle BAD=\dfrac{-7\sqrt{65}}{65}$　　(2) $\triangle ABD$ 面積為 9　　(3) $\overrightarrow{AE}=\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{1}{2}\right)$

(4) 四邊形 $ABCD$ 面積為 $\dfrac{65}{3}$　　(5) $\overline{BC}<\dfrac{8}{3}$　　【115.學測 A】

測驗目標：向量的夾角、線性組合與面積

解：依題意，繪圖如右



(1)對：$\cos\angle BAD=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}|}=\dfrac{(2,-6)\cdot(1,5)}{\sqrt{2^2+(-6)^2}\sqrt{1^2+5^2}}=-\dfrac{7\sqrt{65}}{65}$

(2)錯：$\triangle ABD$ 面積為 $\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}2 & 1\\ -6 & 5\end{vmatrix}\right|=\dfrac{1}{2}|10+6|=8$

(3)錯：$\triangle ABE$ 面積為 3，承(2) $\triangle ABD$ 面積為 8，

可得 $\overline{BE}:\overline{DE}=\triangle ABE$ 面積：$\triangle ADE$ 面積$=3:(8-3)=3:5$

$\therefore\ \overrightarrow{AE}=\dfrac{3}{8}\overrightarrow{AD}+\dfrac{5}{8}\overrightarrow{AB}=\dfrac{3}{8}(1,5)+\dfrac{5}{8}(2,-6)=\left(\dfrac{13}{8},-\dfrac{15}{8}\right)$

(4)錯：$\because\ \overline{AB}$ 平行 $\overline{DC}$ $\therefore\triangle ABE\approx\triangle CDE$

$\Rightarrow\ \overline{AE}:\overline{CE}=\overline{BE}:\overline{DE}=3:5$，

得 $\triangle BCE$ 面積$=\dfrac{5}{3}\triangle ABE$ 面積$=5$，$\triangle CDE$ 面積$=\dfrac{5^2}{3^2}\triangle ABE$ 面積$=\dfrac{25}{3}$

故四邊形 $ABCD$ 面積$=\triangle ABD$ 面積$+\triangle BCE$ 面積$+\triangle CDE$ 面積

$=8+5+\dfrac{25}{3}=\dfrac{64}{3}$

(5)對：$\overrightarrow{AC}=\dfrac{8}{3}\overrightarrow{AE}=\dfrac{8}{3}(\dfrac{13}{8},-\dfrac{15}{8})=(\dfrac{13}{3},-5)$ 得 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=(\dfrac{13}{3},-5)-(2,-6)=(\dfrac{7}{3},1)$

故 $\overline{BC}=\sqrt{(\dfrac{7}{3})^2+1^2}=\sqrt{\dfrac{58}{9}}=\dfrac{\sqrt{58}}{3}<\dfrac{8}{3}=\dfrac{\sqrt{64}}{3}$

選(1)(5)

11、令 Γ 為坐標平面上 $y=\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ 的圖形。對任一實數 $m\neq0$，以 L_m 表示直線 $y=mx+1$。

試選出正確的選項。

(1) $m>0$ 時，L_m 和 Γ 交點的 x 坐標皆為負

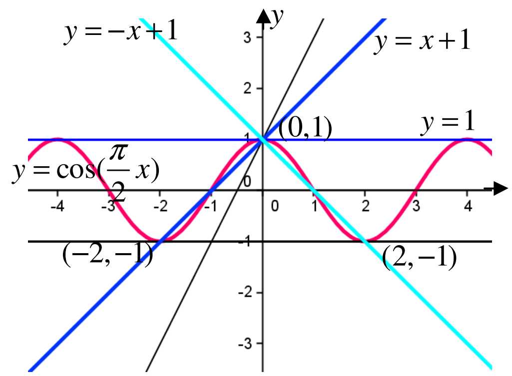
(2)若 $(a\ ,b)$ 為 L_m 和 Γ 的交點，則 $(-a\ ,b)$ 為 L_{-m} 和 Γ 的交點

(3)可以找到一實數 $m\neq0$ 使得 L_m 和 Γ 交於點 $\left(\frac{20}{3}\ ,\frac{1}{2}\right)$

(4)若 L_m 與 Γ 有一交點在直線 $y=-1$ 上，則 $\frac{1}{m}$ 是奇數

(5)若 L_m 與 Γ 有一交點在 x 軸上，則 L_m 與 Γ 有偶數個交點　　　　【115.學測A】

測驗目標：三角函數的圖形及其性質與直線的關係



解：依題意，繪出 $y=\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ ， $y=x+1\ (m=1)$ ，

$y=-x+1\ (m=-1)$ ， $y=1\ (m=0)$ 的圖形

(1)錯： $m=1$時， $y=x+1$與 Γ 交於三點

$(0,1),(-1,0),(-2,-1)$ ，

其中 $(0,1)$ 的 x 坐標為 0。

(2)對：$y=\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ 為偶函數，圖形對稱 y 軸

$\therefore (a,b)$ 為 Γ 的點，則 $(-a,b)$ 亦為 Γ 的點

又 (a,b) 為 L_m ：$y=mx+1$ 上的點，即 $b=ma+1$

$\Rightarrow b=(-m)(-a)+1$ ，則 $(-a,b)$ 為 $L_{-m}:y=-mx+1$ 上的點

故$(a\ ,b)$ 為 L_m 和 Γ 的交點，則 $(-a\ ,b)$ 為 L_{-m} 和 Γ 的交點

(3)錯：由 $\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\times\frac{20}{3}\right)=\cos\left(\frac{10}{3}\pi\right)=\cos\left(2\pi+\frac{4}{3}\pi\right)=\cos\left(\frac{4}{3}\pi\right)=-\frac{1}{2}$

知 Γ 不通過點 $\left(\frac{20}{3}\ ,\frac{1}{2}\right)$

(4)對：L_m 與 Γ 有一交點在直線 $y=-1$ 上($y=\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ 的週期為 4)

$$\Rightarrow \begin{cases}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)=-1\\ mx+1=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2+4k\ ,k\in Z\\ x=\frac{-2}{m}\end{cases}\Rightarrow \frac{-2}{m}=2+2k$$

即 $\frac{1}{m}=-1-2k,k\in z$ 為奇數

(5)錯：當 $m=1$時， $y=x+1$與 Γ 交於 $(0,1),(-1,0),(-2,-1)$ 三點，不是偶數個交點

故選(2)(4)

12、令 $f(x)$、$g(x)$ 爲實係數三次多項式且 $f(x)$ 的首項係數爲 1，已知 $f(x)-g(x)=2x^3+2x$。令 Γ_1 和 Γ_2 分別爲 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在坐標平面上的函數圖形，其對稱中心分別爲 (a_1, b_1)，(a_2, b_2)。試選出正確的選項。

(1) Γ_1 和 Γ_2 恰交於三點　(2) a_1+a_2 可唯一確定

(3) b_1+b_2 可唯一確定　(4) 若 $a_1=a_2$，則 $b_1=b_2$

(5) 若 $b_1=b_2$，則 $a_1=a_2$　【115.學測A】

測驗目標：能夠明白三次函數及其對稱中心

解：設 $f(x)=1\cdot x^3+bx^2+cx+d$，由 $f(x)-g(x)=2x^3+2x$

得 $g(x)=f(x)-2x^3-2x=-x^3+bx^2+(c-2)x+d$

(1)錯：Γ_1 和 Γ_2 的交點個數即爲 $\begin{cases} y=f(x) \\ y=g(x) \end{cases}$ 解的個數，

由 $f(x)=g(x) \Rightarrow f(x)-g(x)=0$

得 $2x^3+2x=0 \Rightarrow 2x(x^2+1)=0$ 有一實根 $x=0$

所以 Γ_1 和 Γ_2 交於一點 $(0,d)$

(2)對：$a_1=\dfrac{-b}{3\times 1}=-\dfrac{b}{3}$，$a_2=\dfrac{-b}{3\times(-1)}=\dfrac{b}{3} \Rightarrow a_1+a_2=(-\dfrac{b}{3})+\dfrac{b}{3}=0$ 唯一確定

(3)錯：由 $b_1=f(-\dfrac{b}{3})=(-\dfrac{b}{3})^3+b(-\dfrac{b}{3})^2+c(-\dfrac{b}{3})+d=\dfrac{2b^3}{27}+c(-\dfrac{b}{3})+d$

$b_2=g(\dfrac{b}{3})=-(\dfrac{b}{3})^3+b(\dfrac{b}{3})^2+(c-2)(\dfrac{b}{3})+d=\dfrac{2b^3}{27}+c(\dfrac{b}{3})-\dfrac{2b}{3}+d$

所以 $b_1+b_2=f(\dfrac{-b}{3})+g(\dfrac{b}{3})=\dfrac{4b^3}{27}-\dfrac{2b}{3}+2d$ (與 b 、d 有關)

(4)對：$a_1=a_2 \Rightarrow -\dfrac{b}{3}=\dfrac{b}{3} \Rightarrow b=0$，

得 $b_1=f(-\dfrac{b}{3})=f(0)=d$，$b_2=g(\dfrac{b}{3})=g(0)=d$，所以 $b_1=b_2$

(5)錯：$b_1=b_2 \Rightarrow f(-\dfrac{b}{3})=g(\dfrac{b}{3}) \Rightarrow \dfrac{2b^3}{27}+c(-\dfrac{b}{3})+d=\dfrac{2b^3}{27}+c(\dfrac{b}{3})-\dfrac{2b}{3}+d$

整理得 $\dfrac{b}{3}(2c-2)=0$ 得 $b=0$ 或 $c=1$

當 $c=1$ 且 $b\neq 0$ 時，則 $a_1\neq a_2$

故選(2)(4)

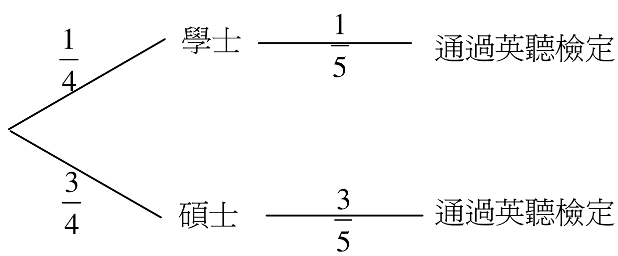
三、選塡題(占 25 分)

13、高中聘用的全體教師$\frac{1}{4}$只有學士學位，$\frac{3}{4}$有碩士學位。只有學士學位的教師中有$\frac{1}{5}$通過英聽檢定，有碩士學位的教師中有$\frac{3}{5}$通過英聽檢定。已知每位教師被抽到的機會相等，若隨機抽選一位通過英聽檢定的教師，則該教師有碩士學位的條件機率爲______。

【115.學測 A】

測驗目標：貝氏定理的應用

解：依題意得



故 $P(\text{碩士}\mid\text{通過英聽檢定})=\dfrac{P(\text{碩士}\cap\text{通過英聽檢定})}{P(\text{通過英聽檢定})}=\dfrac{\frac{3}{4}\times\frac{3}{5}}{\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}+\frac{3}{4}\times\frac{3}{5}}=\dfrac{9}{10}$

14、坐標平面上，向量 $(a\,,b)$ 與直線 $y=bx-1$ 垂直，則 $a+b$ 的最大可能值爲________。

【115.學測 A】

測驗目標：向量垂直直線與二次函數極值的應用

解：$\because$向量 $(a\,,b)$ 與直線 $y=bx-1$ 垂直($y=bx-1\Rightarrow bx-y-1=0$)

$\therefore (a,b)//(b,-1)\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{b}{-1}(b\neq 0)$ 得 $a=-b^2$

則 $a+b=-b^2+b=-[b^2-b+(\frac{1}{2})^2]+\frac{1}{4}=-(b-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}\leq\frac{1}{4}$

故當 $b=\frac{1}{2}$時，$a+b$ 有最大值$\frac{1}{4}$

15、已知三正數 a，b，c 成一等差數列，其中 $a<b<c$，且坐標平面上三點 $(a\,,\log 3a)$、$(b\,,\log 4b)$、$(c\,,\log 6c)$ 在同一直線上，則 $\dfrac{b}{a}$ 之值爲____________。(化爲最簡分數)

【115.學測 A】

$\boxed{\text{測驗目標}}$：明白共線性質，結合等差數列與對數的運算

解：$\because a$，b，c 成一等差數列 $\therefore b-a=c-b \Rightarrow 2b=a+c$ ……(1)

又 $(a\,,\log 3a)$、$(b\,,\log 4b)$、$(c\,,\log 6c)$ 共線，

得 $\dfrac{\log 4b-\log 3a}{b-a}=\dfrac{\log 6c-\log 4b}{c-b}$ $\therefore \log 4b-\log 3a=\log 6c-\log 4b$

$\Rightarrow \log\dfrac{4b}{3a}=\log\dfrac{6c}{4b}=\log\dfrac{3c}{2b}$，即 $\dfrac{4b}{3a}=\dfrac{3c}{2b}\Rightarrow 8b^2=9ac$ ……(2)

由(1) $c=2b-a$ 代入(2) 得 $8b^2=9a(2b-a)$

整理得 $8b^2-18ab+9a^2=0\Rightarrow(2b-3a)(4b-3a)=0$

解得 $2b=3a$ 或 $4b=3a$ (不合 $\because a<b$)，故 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{3}{2}$

16、坐標平面上，已知二次函數圖形 Γ：$y=f(x)$ 的頂點 P 在直線 $y=1+2x$ 上，且交 x 軸於點 $A\left(-\dfrac{1}{2}\,,0\right)$、$B\left(\dfrac{1}{2}\,,0\right)$。將 Γ 平移使得平移後圖形的頂點 Q 仍在直線 $y=1+2x$ 上，且亦通過點 $B\left(\dfrac{1}{2}\,,0\right)$，此時 P、Q 爲兩相異點，則 $\overline{PQ}=$______。(化爲最簡根式)

【115.學測 A】

$\boxed{\text{測驗目標}}$：充分理解二次函數及其平移

解：設 $f(x)=a\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)=ax^2-\dfrac{1}{4}a$ 得 $y=f(x)$ 的頂點 $P(0,-\dfrac{1}{4}a)$

又 $P(0,-\dfrac{1}{4}a)$ 在直線 $y=1+2x$ 上 $\Rightarrow$ $-\dfrac{1}{4}a=1$ $\Rightarrow a=-4$，

得 頂點 $P(0,1)$，$f(x)=-4x^2+1$

令 Γ 平移後圖形的頂點 $Q(h,1+k)$，平移後函數 $y=g(x)=-4(x-h)^2+1+k$

由 $Q(h,1+k)$ 在直線 $y=1+2x$ 上 $\Rightarrow$ $1+k=1+2h$ $\Rightarrow$ $k=2h$

又 $y=g(x)=-4(x-h)^2+1+2h$ 通過 $B\left(\dfrac{1}{2},0\right)\Rightarrow -4(\dfrac{1}{2}-h)^2+1+2h=0$

$\Rightarrow$ $-4h^2+6h=0$ $\Rightarrow$ $-2h(2h-3)=0$，解得 $h=0$ (不合)或 $h=\dfrac{3}{2}\Rightarrow Q(\dfrac{3}{2},4)$

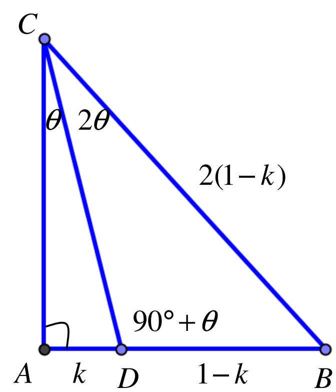
$\therefore \overline{PQ}=\sqrt{\left(\dfrac{3}{2}-0\right)^2+(4-1)^2}=\sqrt{\dfrac{45}{4}}=\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$

17、直角△ABC 中，∠CAB 爲直角，$\overline{AB}$ 邊上一點 D，滿足∠BCD＝2∠ACD，且 $\overline{BC}=2\overline{BD}$。

若 $\overrightarrow{AD}=k\overrightarrow{AB}$ ，則 k＝________。(化爲最簡分數)　　【115.學測 A】

測驗目標：三角比、正弦定理及倍角公式的應用

解：依題意繪圖如右



設 $\overline{AB}=1$，$\overline{AD}=k$，則 $\overline{BD}=1-k$，$\overline{BC}=2(1-k)$

在△BCD 中，由正弦定理知

$$\frac{2(1-k)}{\sin(90^\circ+\theta)}=\frac{1-k}{\sin 2\theta}\Rightarrow\frac{2}{\cos\theta}=\frac{1}{2\sin\theta\cos\theta}$$

得 $\sin\theta=\frac{1}{4}$

在△ACD 中，由 $\sin\theta=\frac{1}{4}$，$\overline{AD}=k$

可得 $\overline{CD}=4k\ \Rightarrow\ \overline{AC}=\sqrt{(4k)^2-k^2}=\sqrt{15}k$

在△ABC 中，由畢氏定理 $\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$

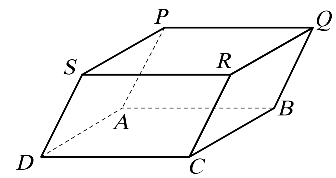
即 $[2(1-k)]^2=1^2+(\sqrt{15}k)^2$

整理得 $11k^2+8k-3=0\Rightarrow(11k-3)(k+1)=0$，解得 $k=\frac{3}{11}$ 或 $k=-1$(不合)

四、混合題或非選擇題（占 15 分）

18－20 題爲題組

坐標空間中有一平行六面體 $PQRS-ABCD$，如圖所示。已知



$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}=(-5,5,5)$、$\overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{AP}=(-2,0,-4)$、

$\overrightarrow{AP}\times\overrightarrow{AB}=(6,-10,-8)$，$\overline{AP}=6$。試回答下列問題。

18、試問平行四邊形 $ABCD$ 的面積爲何？(單選題，3 分)

(1) $2\sqrt{5}$　(2) $5\sqrt{2}$　(3) $5\sqrt{3}$　(4) $6\sqrt{3}$　(5) $10\sqrt{2}$　【115.學測 A】

$\boxed{\text{測驗目標}}$：外積長度的幾何意義

解：平行四邊形 $ABCD$ 的面積爲

$$|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}|=\sqrt{(-5)^2+5^2+5^2}=5\sqrt{3}$$

故選(3)

19、設 B 點坐標爲 $(1,2,0)$，試求平面 $ABCD$ 的平面方程式。(非選擇題，4 分)

【115.學測 A】

$\boxed{\text{測驗目標}}$：平面方程式

解：平面 $ABCD$ 的法向量 $\overrightarrow{n}\ //\ \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}=(-5,5,5)=(-5)(1,-1,-1)$

取法向量 $\overrightarrow{n}=(1,-1,-1)$，又平面 $ABCD$ 通過點 $B\ (1,2,0)$

故所求平面方程式爲 $x-y-z=-1$

20、試求平行六面體的體積，並求平行六面體上 (含邊界) 距點 A 的最長距離。

(非選擇題，8 分)　【115.學測 A】

$\boxed{\text{測驗目標}}$：明白外積的性質與平行六面體體積的應用

解：(1) $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}=(-5,5,5)$、$\overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{AP}=(-2,0,-4)$、$\overrightarrow{AP}\times\overrightarrow{AB}=(6,-10,-8)$

又 $\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{AP}$ 且 $\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{AP}\times\overrightarrow{AB}$ $\therefore$ $\overrightarrow{AP}//(\overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{AP})\times(\overrightarrow{AP}\times\overrightarrow{AB})$

其中 $(\overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{AP})\times(\overrightarrow{AP}\times\overrightarrow{AB})=(-2,0,-4)\times(6,-10,-8)=(-40,-40,20)$

即 $\overrightarrow{AP}//(-40,-40,20)=-20(2,2,-1)$，

令 $\overrightarrow{AP}=t(2,2,-1)$ 且 $\overline{AP}=6$

可得 $\overrightarrow{AP}=6(\pm\dfrac{(2,2,-1)}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}})=\pm(4,4,-2)$，根據圖形取 $\overrightarrow{AP}=(4,4,-2)$，

故平行六面體的體積為$\left|\overrightarrow{AP}\cdot(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD})\right|=\left|(4,4,-2)\cdot(-5,5,5)\right|=10$

(2)同理，$\overrightarrow{AD}//(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD})\times(\overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{AP})$

其中 $(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD})\times(\overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{AP})=(-5,5,5)\times(-2,0,-4)=(-20,-30,10)$

即 $\overrightarrow{AD}//(-20.-30,10)=(-10)(2,3,-1)$

令 $\overrightarrow{AD}=s(2,3,-1)$ 且 $\overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{AP}=(-2,0,-4)$

得 $s(-2,0,-4)=(-2,0,-4)\Rightarrow s=1\quad\therefore\overrightarrow{AD}=(2,3,-1)$

同理，$\overrightarrow{AB}//(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD})\times(\overrightarrow{AP}\times\overrightarrow{AB})$

其中 $(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD})\times(\overrightarrow{AP}\times\overrightarrow{AB})=(-5,5,5)\times(6,-10,-8)=(10,-10,20)$

即 $\overrightarrow{AB}//(10,-10,20)=(10)(1,-1,2)$

令 $\overrightarrow{AB}=r(1,-1,2)$ 且 $\overrightarrow{AP}\times\overrightarrow{AB}=(6,-10,-8)$

得 $r(6,-10,-8)=(6,-10,-8)\Rightarrow r=1\quad\therefore\overrightarrow{AB}=(1,-1,2)$

所以 $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|=\left|(3,2,1)\right|=\sqrt{14}$

$\left|\overrightarrow{AS}\right|=\left|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AD}\right|=\left|(6,7,-3)\right|=\sqrt{94}$

$\left|\overrightarrow{AQ}\right|=\left|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AB}\right|=\left|(5,3,0)\right|=\sqrt{34}$

$\left|\overrightarrow{AR}\right|=\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AP}\right|=\left|(7,6,-1)\right|=\sqrt{86}$

故平行六面體上距點 A 的最長距離為 $\overline{AS}=\sqrt{94}$